

GÉOMÉTRIE

ÉLÉMENTAIRE.

STRASBOURG, IMPRIMERIE DE G. SILBERMANN,
PLACE SAINT-THOMAS, 3.

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE,

SUIVIE

DE LA TRIGONOMÉTRIE RECTILIGNE ET SPHÉRIQUE,

A L'USAGE

DES CANDIDATS AUX ÉCOLES SPÉCIALES,

PAR

P. J. E. FINCK,

Docteur ès sciences, ancien élève de l'École polytechnique, professeur de mathématiques spéciales dans les Colléges royaux, professeur de mathématiques aux Écoles royales d'artillerie, suppléant et chargé du cours d'analyse infinitésimale à la Faculté des sciences de l'Académie de Strasbourg.

Autorisée par le Conseil royal de l'instruction publique.

TROISIÈME ÉDITION REVUE ET AMÉLIORÉE.

STRASBOURG,

CHEZ DERIVAUX, LIBRAIRE RUE DES HALLEBARDES, 24.

PARIS,

CHEZ DEZOBRY, MAGDELEINE ET Ce, libraires, r. des Maçons-Sorbonne, 1.

CHEZ CARILLAN-GOEURY ET DALMONT, libraires, quai des Augustins.

1844.



OUVRAGES DU MÊME AUTEUR :

	Fr. C.
Traité élémentaire d'Arithmétique, 2e édit., 1843. .	3 50
Système d'Algèbre, 1839	7 50
Calcul différentiel, 1834.	5 —
Discussion géométrique des équations du second degré à trois variables	— 50
Principes de l'analyse infinitésimale. Brochure in-8°.	1 75



OBSERVATIONS ESSENTIELLES

SUR CETTE TROISIÈME ÉDITION.

Le succès des deux premières éditions de ma Géométrie ne m'a pas empêché de faire de nombreuses et importantes améliorations à cet ouvrage. Le préliminaire expose et motive le plan nouveau que j'ai adopté; il me paraît être le vrai développement de l'idée de la *Géométrie élémentaire*.

J'ai employé quelques termes nouveaux, expressifs, et plus concis que les locutions anciennes (l 2, déf. 8, et l. 5, déf. 9). Le mot *inverse* a été employé au lieu de *symétrique* pour les angles polyèdres, jusqu'au moment où l'on a pu faire voir que l'un et l'autre rendent la même idée.

Certains énoncés difficiles à *dire* ont été réformés (p. 22, l. 1, p. 8, l. 5, etc.). Pour remplacer des termes qui se répètent souvent, on a employé des signes abréviatifs (*angle, triangle, parallélogramme*, etc.).

Dans les proportions nous avons en France un usage qui me semble mauvais. C'est l'emploi des quatre points au lieu du signe d'égalité. Je ne vois aucune espèce d'avantage à la première notation; au contraire, les commençants oublient assez vite la signification des quatre points, et, par suite, la nature de la proportion. Je me propose de renoncer, plus tard, aux quatre points. Comme dans mes deux premières éditions, j'ai peu insisté sur la définition de la droite, et sur celle des grandeurs géométriques: *angle, longueur, surface, volume.* Pour ces trois dernières, je ne les ai pas définies, et l'on sait pourquoi.

Dans la théorie des parallèles, la méthode de Bertrand, de Genève, ne me paraît pas aujourd'hui plus rigoureuse qu'autrefois. Le vice de ces raisonnements se trouve dans le vague de l'expression *plus grand*, qui y est employée dans deux sens différents. Rien n'empêche, avec ce secours, de *démontrer* le postulatum bien plus simplement qu'on ne le fait. Il est vrai qu'alors le défaut devient plus saillant. En effet, si l'on veut employer cette manière de déguiser la difficulté, pourquoi ne pas faire ainsi : La droite AC fait avec AB un angle droit, l'angle DBA est aigu; par suite DBE est obtus; donc DBE ne peut pas être contenu dans A, et BD coupera AC.

D C

E B A

Les raisonnements fonctionnels de Legendre supposent au fond ce qui est en question.

Il y a aussi un postulatum dans l'espace : savoir qu'une aire plane est moindre que toute surface courbe terminée au même contour. Cette propriété se démontre s'il s'agit d'une surface polyédrale au lieu d'une surface courbe (l. 5, p. 51); le germe du raisonnement se trouve dans le l. 6, 2e édit. Du reste, cela n'est pas nouveau, si je ne me trompe. On peut éviter ce postulatum par un autre, en donnant une certaine définition de l'aire d'une surface courbe.

La théorie élémentaire des infiniment-petits a été rejetée à sa véritable place, en arithmétique, auprès des incommensurables.

La table des matières donne une idée nette de ce que l'ouvrage renferme, ainsi que de l'ordre qui a été suivi; chaque livre est résumé par un som-

maire placé en tête. L'utilité de ces sommaires est évidente.

D'après l'ordre que j'ai suivi, toute la théorie des transversales, sur le plan, forme un appendice, c'est-à-dire une subdivision, du troisième livre. Elle y est présentée d'une manière à la fois plus simple et plus complète : j'ai donné là aussi les premières indications sur les méthodes de transformation, objet sur lequel je suis revenu dans une note à la suite de la Géométrie.

De nouvelles études sur la détermination de π par la méthode de SCHWAB, ont amené des simplifications notables dans cette matière; on les trouvera en partie au troisième livre, en partie dans une note, à la fin de la Géométrie.

Dans le cinquième livre, partant de l'idée d'après laquelle j'ai, dans les deux premières éditions, présenté la symétrie des angles polyèdres, j'ai complété la théorie de la symétrie de toute espèce de figures. Un théorème simple sur l'égalité trouve de nombreuses applications à chaque pas, et simplifie la géométrie (p. 51, l. 5) de l'espace.

Dans le sixième livre, quelques propriétés des triangles sphériques n'ont été qu'énoncées, parce qu'elles sont déjà démontrées dans le cinquième, à propos des angles polyèdres, et que du reste le lecteur les prouvera facilement en imitant le premier livre.

Dans le huitième livre j'ai donné une démonstration nouvelle pour le volume du prisme; elle est plus simple que celle de la deuxième édition, laquelle a passé tacitement dans un ouvrage postérieur au mien. Le volume du corps, décrit par un

triangle autour d'un axe situé dans son plan (l. 8, p. 23 et 24), fait reconnaître la supériorité de la méthode rigoureuse des infiniment-petits.

En général, la géométrie de l'espace m'a paru devoir être présentée avec autant de développements que celle du plan ; c'est pour ce motif que j'ai donné certains théorèmes sur l'intersection et le contact des surfaces cylindriques, etc.

Dans la trigonométrie on trouvera les développements du sinus et du cosinus en fonction de l'arc; j'ai montré que, contrairement à ce que j'avais avancé précédemment, les formules de Simpson peuvent être employées au calcul du sinus de 0° à 90°. Enfin j'ai déterminé avec plus de précision la limite de l'erreur des calculs de triangles.

Mon ouvrage, composé d'après des idées purement scientifiques, répond par cela même aux besoins des divers degrés d'enseignement dans nos colléges. (Voir sous ce rapport l'avis qui est en tête de la table des matières.)

Pour cette édition je dois beaucoup à la lecture des ouvrages de MM. Chasles, Poncelet, Gergonne, Terquem, etc.

Signes particuliers à la Géométrie.

∧ Angle.
△ Triangle.
▱ Parallélogramme.
⬡ Parallélipipède.
◇ Triangle sphérique.

Pour les signes *numériques*, voyez l'Arithmétique.

TABLE

DES

DÉFINITIONS ET PROPOSITIONS.

Avis. 1° Les articles non marqués d'astérisques répondent au programme des classes préparatoires et accessoires à la philosophie. On pourra, dans ce cas, simplifier les démonstrations relatives aux corps ronds.

2° En y joignant les parties marquées d'un seul *, on a le cours élémentaire proprement dit.

3° Ce qui est marqué de deux * est destiné aux lecteurs qui désirent faire des études plus approfondies.

Nota. Pour la facilité des recherches, il y a pour chaque livre une table des définitions et une table des propositions.

PRÉLIMINAIRE.

LIVRE I.

LES FIGURES PLANES. — GRANDEUR ABSOLUE DE LEURS ÉLÉMENTS.

LA DROITE.

Définitions.

Propositions.

LIVRE II.

LES FIGURES PLANES. — GRANDEUR ABSOLUE DE LEURS ÉLÉMENTS.

LA DROITE ET LE CERCLE.

Définitions.

Propositions.

LIVRE III.

LES FIGURES PLANES. — GRANDEUR RELATIVE DE LEURS ÉLÉMENTS.

Définitions.

Propositions.

** APPENDICE.

LES TRANSVERSALES.

Définitions.

Propositions.

**

LIVRE IV.

LES FIGURES PLANES.

LEURS SURFACES COMPARÉES PAR L'INTERMÉDIAIRE DES LONGUEURS.

Définitions.

Propositions.

LIVRE V.

LES FIGURES DANS L'ESPACE. GRANDEUR ABSOLUE DE LEURS ÉLÉMENTS.

DROITES ET PLANS.

Définitions.

Propositions.

LIVRE VI.

LES FIGURES DANS L'ESPACE. GRANDEUR ABSOLUE DES ÉLÉMENTS.

PLANS ET SURFACES COURBES DANS LEURS POSITIONS RELATIVES.

Définitions.



Propositions.

LIVRE VII.

FIGURES DANS L'ESPACE.

GRANDEUR RELATIVE DE LEURS ÉLÉMENTS.

Définitions.

Propositions.

LIVRE VIII.

LES FIGURES DANS L'ESPACE.

GRANDEUR RELATIVE DES AIRES ET VOLUMES COMPARÉS PAR L'INTERMÉDIAIRE DE LA LONGUEUR.

Définitions.

§ I. AIRES.

Propositions.

§ 2. Volumes.

LA TRIGONOMÉTRIE.*

LIVRE I.

PRINCIPES DE L'ANALYSE DES FONCTIONS ANGULAIRES.

Définitions.

Propositions.

* Les astérisques désignent ici des parties qui sortent du Cours élémentaire.

LIVRE II.

RÉSOLUTION DES TRIANGLES.

§ 1. Calcul des tables de sinus, etc.

Propositions.

§ 2. Résolution des Δ.

§ 3. Résolution des ◬.

ADDITIONS.

Page 11, dernière ligne : après CD, *ajoutez* situées dans un même plan.

Livre V, Prop. 13. Cor. *Si deux droites concourantes* A, B, *sont respectivement parallèles à deux droites concourantes* A', B', *le plan* (AB) *des deux premières est parallèle au plan* (A'B') *des deux autres.* Car si les plans AB, A'B', qui contiennent respectivement les droites, A, A', se coupaient, leur intersection serait parallèle à A ; de même elle le serait à B. Donc deux droites A, B, issues d'un même point seraient parallèles à une même droite, ce qui ne se peut.

Livre V, Pr. 19. Cor. *Deux plans parallèles* CD, C'D', *sont partout également distants.* En effet, soient des droites AB, A'B', perpendiculaires au plan CD; elles le seront aussi au plan C'D' (p. 17); d'ailleurs elles seront parallèles (p. 9, 2°). Donc elles sont égales, etc.

SUPPRESSIONS.

L'indication 1°, en tête du théorème, p. 3, et aux p. 13, 14, 19, l. 2.
Les mots : pour la seconde fois, page 48, ligne 8 en remontant.

***

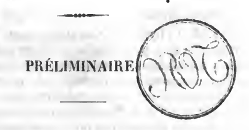
FAUTES A CORRIGER.

Pages.	Lignes.	Au lieu de	Lisez
18	11 en rem.	AB+DC	AD+DC
23	10 *id.*	B	A
40	6	BD	BC
60	14 en rem.	11 5	11 : 5
62	17	le rendre	rendre ce reste
142	5	b—b'>	b—b'<
173	3 en rem.	pris le	pris dans le
210	9	polyèdre	polygone
253	5	demi-somme	somme
ib.	7	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$
254	14	Remarque. Soit	Cela posé soit
333	20 et 23	D	∞

RENVOIS A RECTIFIER.

27	13	25	19
28	8	d. 1	d. 2
31	5 en rem.	42	43
211	2 *id.*	42 fig. 231	46 fig. 234

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.



PRÉLIMINAIRE.

OBJET DE LA GÉOMÉTRIE. — DIVISION DES MATIÈRES.

Définition 1. Parmi les propriétés des corps, la géométrie ne considère que l'étendue : elle est la science de l'étendue limitée ; son objet est d'étudier cette propriété sous le rapport de la *forme* et de la *grandeur*.

Quant à la forme, l'étendue offre deux modifications principales : l'une appelée *surface*, l'autre appelée *ligne*.

Déf. 2. On nomme *surface* la limite qui circonscrit un corps. Une surface peut être plus ou moins grande : si on la conçoit divisée en parties, la surface totale est plus grande que chaque partie. Une surface est une *grandeur*.

Déf. 3. Si une surface est divisée en parties, les limites qui les séparent sont appelées des *lignes*. Une ligne peut être plus ou moins longue. — Une ligne est une grandeur.

Déf. 4. Une ligne étant terminée ou divisée en parties, les extrémités de la ligne ou de ses parties se nomment des *points*.

Le *volume* d'un corps peut aussi être plus ou moins grand : le volume est une troisième espèce de grandeur. Tout assemblage de points, de lignes, de surfaces, de corps, se nomme une *figure*.

Etudier la forme des lignes, des surfaces, c'est les comparer sous le rapport de cette propriété ; or, pour cela il faut un terme de comparaison final, une forme primitive dont la notion n'exige pas elle-même la connaissance de de quelque autre forme.—Cette forme, dont tout le monde a une idée plus ou moins nette, s'appelle *ligne droite*, ou simplement *droite*.

DÉF. 5. La ligne droite est la plus courte ligne qui puisse être conçue d'un point à un autre. Nous regardons comme vérités d'expérience : 1° que d'un point à un autre on peut toujours concevoir une droite, mais qu'on n'en saurait imaginer plus d'une ; 2° que toute droite peut être *prolongée* dans deux sens, mais d'une manière seulement dans chaque sens, de telle façon qu'une droite prolongée est encore une droite. Il s'ensuit que deux droites qui ont deux points quelconques communs, ne forment qu'une seule et même droite. Cela posé, la géométrie admet dans son domaine toutes les lignes et surfaces qui peuvent être définies d'une manière exacte et exclusive au moyen de la droite, soit médiatement, soit immédiatement. La droite est donc la forme fondamentale, élémentaire de toute la géométrie. — Elle est aussi la base de la géométrie quant aux grandeurs ; car la comparaison de celles-ci sera ramenée à la comparaison des longueurs, et la longueur est, parmi les différentes grandeurs géométriques, celle qui se prête le plus facilement à nos moyens de connaître.

DÉF. 6. Une ligne composée de droites qui se coupent successivement, se nomme *ligne brisée*.

DÉF. 7. Toute ligne qui n'est ni droite ni brisée, se nomme *ligne courbe*.

Parmi les surfaces, il en est une qui ne suppose que la notion de la droite, et à laquelle, pour cette raison, on compare toutes les autres, immédiatement ou non. — C'est le *plan*.

DÉF. 8. Le plan est une surface à laquelle une droite peut s'appliquer exactement dans tous les sens, de telle fa-

çon que toute droite qui passe par deux points du plan est tout entière sur cette surface.

Remarque. Nous admettons comme vérités d'observation : 1° que tout plan peut se prolonger indéfiniment dans tous les sens ; 2° que si l'on considère deux points situés l'un d'un côté d'un plan, l'autre de l'autre côté, tous les deux d'ailleurs hors du plan, toute ligne non interrompue, droite ou non, qui va d'un de ces points à l'autre, coupera le plan au moins en un point ; 3° si une droite AB (fig. 1) est située dans un plan CD, toute ligne non interrompue, droite ou non, qui est dans ce plan, et qui passe d'un point E, pris d'un côté de AB, à un point F, pris de l'autre, coupera AB au moins en un point ; 4° que tout plan peut tourner autour d'une droite qui y est située, et parcourir ainsi tout l'espace, de sorte qu'il n'existe aucun point, que le plan, dans son mouvement, ne puisse enfin atteindre.

La définition 5 explique les propriétés premières de la droite. On en déduit les suivantes par rapport au plan.

Théorème. — Fig. 2.

Par trois points non situés en ligne droite on peut toujours faire passer un plan unique.

1° Soient les trois points A, B, C, non situés en ligne droite. Tirez la droite indéfinie AB. Dans un plan quelconque tirez une droite ; transportez ce plan jusqu'à ce que cette dernière droite s'applique sur AB ; faites alors tourner ce plan autour de AB, jusqu'à ce qu'il contienne le point C, ce qui est possible, d'après l'axiome 4° ci-dessus. Le plan contiendra donc les trois points A, B, C. Soit DE ce plan. Je dis de plus que tout autre plan qui contient ces trois points, se confondra avec le plan DE. En effet, soit FG un second plan passant par ces trois points ; la droite AB ayant deux points A, B dans chacun des plans DE, FG (déf. 8), est tout entière dans chacun de ces plans. Il en sera de même de la droite BC qui joint les points B, C. Cela posé, prenez dans le plan DE un point quelconque H : je dis que ce point H

sera aussi dans le plan FG. Pour le prouver, prenez sur AB prolongée de l'autre côté de BC par rapport à H, un point quelconque I : tirez la droite IH. La droite AB étant dans le plan DE, le point I s'y trouve aussi ; le point H y est également ; donc la droite IH est dans ce même plan DE, et elle coupera la droite BC, qui est dans ce plan (déf. 8, rem.). Soit K le point d'intersection de BC et IH ; les droites AB, BC sont aussi dans le plan FG : donc les points I, K, pris respectivement sur ces droites sont dans ce plan, ainsi que la droite IK. Mais dès lors le point H, situé sur IK, est lui-même dans le plan FG. Donc en effet tout point H, pris dans le plan DE, se trouve dans le plan FG ; donc le plan DE se confond avec FG.

Remarque. Au lieu des trois points A, B, C, on pourrait donner les droites AB, BC, pour déterminer le plan DE.

Déf. 9. Toute surface qui n'est ni plane, ni composée de surfaces planes, est appelée *surface courbe*.

Le plan, a-t-on dit, est le terme de comparaison final des surfaces. L'étude du plan doit donc précéder celle des surfaces courbes, et des surfaces formées d'assemblages de de plans. De là la division de la géométrie en géométrie des figures planes, et géométrie de l'espace (figures non planes).

Parmi les figures curvilignes, la géométrie élémentaire ne considère que celles qui dérivent du cercle, dont l'idée est généralement aussi familière que celle de la droite. On le définira plus loin.

Dans une figure plane il ne peut y avoir que trois choses à considérer : la longueur des lignes, leur position relative, et la surface. C'est donc sous ces trois points de vue seulement que nous aurons à étudier les propriétés des figures planes. Quant à l'espace, il y aura de plus à considérer les volumes.

Il est évident que la première étude à faire sur les figures, c'est de les définir, d'en reconnaître la composition. Or, il est naturel de commencer par les figures rectilignes. D'un autre côté, on peut s'assurer *a priori* qu'une combinaison de lignes droites, une figure rectiligne quelconque, peut se détermi-

ner par le moyen des *positions* ou *directions relatives* de ces droites, et les longueurs de celles qui ne sont point indéfinies. C'est pour cela que nous regarderons la direction relative et la longueur comme les éléments fondamentaux des figures ; mais la direction relative de deux droites situées dans un plan s'estime par leur inclinaison, qui pouvant être plus ou moins grande, est une grandeur d'un nouveau genre que nous apprendrons à connaître bientôt sous le nom d'*angle*. D'un autre côté, des grandeurs géométriques peuvent être combinées entre elles de deux manières : 1° immédiatement et sans le secours des nombres ; 2° par l'intermédiaire des nombres. C'est ainsi, quant au premier cas, que des droites peuvent être ajoutées l'une à l'autre, sans qu'on sache quelle est leur expression en nombres. Que si à l'idée d'étendue on joint celle de nombre, il y a complication. Donc pour passer du simple au composé, il convient d'étudier d'abord les figures planes dans leurs éléments, indépendamment de la possibilité d'exprimer ceux-ci en nombres, c'est-à-dire en les considérant dans *leur grandeur absolue*. Après cela on s'occupera des relations numériques de ces mêmes éléments, et enfin de celles des surfaces des figures planes.

Dans l'espace il y aura à traiter des assemblages de droites, de plans, de surfaces courbes ; les angles et les longueurs sont encore ici les grandeurs élémentaires, dont l'étude sera suivie de celle des surfaces (grandeurs) et des volumes. De là les divisions suivantes :

Livre I. Les figures planes : grandeur absolue de leurs éléments : la droite.

Livre II. Les figures planes : grandeur absolue de leurs éléments : le cercle et la droite.

Livre III. Les figures planes : grandeur relative des éléments. (*Lois numériques de l'étendue.*)

Livre IV. Les figures planes : grandeur relative des surfaces comparées au moyen de la longueur. (*Lois numériques.*)

Livre V. Les figures dans l'espace : grandeur absolue de leurs éléments : la droite.

Livre VI. Les figures dans l'espace : grandeur absolue de leurs éléments : la droite et le cercle.

Livre VII. Les figures dans l'espace : grandeur relative de leurs éléments. (*Lois numériques.*)

Livre VIII. Les figures dans l'espace : grandeur relative des surfaces et des volumes comparés par le moyen de la longueur. (*Lois numériques.*)

Remarquez que les livres 1, 2, 5, 6 comprennent proprement la géométrie *pure*, indépendante du nombre, la géométrie des *formes*. Aussi cette partie de la géométrie est-elle subdivisée d'après la nature différente des formes. Les livres 3, 4, 7, 8 comprennent le calcul appliqué à l'étendue, et cette partie est subdivisée d'après la nature différente des grandeurs. Ici c'est l'idée de grandeur qui est le point de départ. Du reste la séparation n'est pas tranchée et ne saurait l'être : toutes ces parties sont liées les unes aux autres de la manière la plus intime.

Ces huit livres contiennent les lois élémentaires qui régissent l'étendue figurée.

Remarque. Si par la suite il nous arrive de regarder *le point* comme un élément des figures, il est évident que le mot *élément* n'aura pas dans ce cas le sens de *grandeur élémentaire*, sens qu'il a dans ce qui précède.

LIVRE I.

LES FIGURES PLANES :

GRANDEUR ABSOLUE DE LEURS ÉLÉMENTS.

LA DROITE.

Déf. 1.—Fig. 3. Une figure formée de deux droites AB, AC, qui sont situées dans un même plan et se coupent en un point A, s'appelle un *angle;* le point A se nomme le *sommet* de l'angle; les droites AB, AC, se nomment les *côtés*.

Pour se faire une idée nette de l'angle, on n'a qu'à supposer que la droite AB, d'abord couchée sur AC et ne faisant qu'une seule et même droite avec celle-ci, tourne autour du point A, tandis que AC reste fixe; à mesure que AB tourne, l'angle qu'elle fait avec AC augmente.

L'angle se désigne par trois lettres, dont une placée au sommet et les deux autres sur les côtés; la lettre du sommet se place entre les deux autres. Ainsi l'angle formé par AB et AC se nomme *l'angle* BAC.

Soit un second angle *bac;* plaçons le côté *ac* sur AC, de façon que le point *a* tombe sur A; le point *c* tombera quelque part en E. Si l'on couche le plan *bac* sur le plan BAC, trois cas pourront se présenter : 1° le côté *ab* peut tomber sur AB, de sorte que *b* vienne tomber en un point F; dans ce cas on dit que l'angle *bac* est égal à l'angle BAC ; 2° le côté *ab* peut tomber entre AB et AC, par exemple, sur AD, et dans

ce cas l'angle *bac* est dit plus petit que BAC ; 3° enfin, si le côté *ab* tombe hors de l'angle BAC, en AG je suppose, l'angle *bac* sera dit plus grand que BAC. On voit donc que la longueur des côtés n'entre point en ligne de compte dans la considération de l'angle.

Au lieu de désigner un angle par trois lettres, on peut le désigner par la seule lettre du sommet, s'il n'y en a qu'un qui ait son sommet au même point : ainsi on peut dire l'angle *a*.

Si deux angles BAD, DAC, situés dans le même plan, ont même sommet A, et un côté commun AD, l'angle BAC formé par les côtés non communs, est appelé *la somme* des angles BAD, DAC; par suite DAC est la différence des angles BAC, BAD. Si l'on fait une somme de 3, 4, etc., angles égaux à un angle donné, on aura multiplié celui-ci par 3, 4, etc.

Déf. 2. Fig. 4.—Si une droite AB, ou AE, part d'un point A d'une autre droite DC, deux cas sont possibles : ou la première droite fait avec la seconde deux angles adjacents égaux, ou elle fait avec celle-ci deux angles inégaux : si la droite AB fait avec DC deux angles égaux BAD, BAC, ces angles sont *dits droits*, et la droite AB est dite *perpendiculaire* à DC. Dans le cas où une droite AE fait avec CD deux angles inégaux DAE, CAE, ces angles sont appelés *obliques*, et la droite AE est dite oblique à DC.

PROPOSITION I.

Théorème. — Fig. 4.

En un point A *d'une droite* DC, *et dans un même plan qui la contient, il n'existe pas plus d'une perpendiculaire à cette droite* DC, *d'un même côté de cette droite.*

En effet, soit AB une perpendiculaire à DC : les angles DAB, CAB sont égaux (déf. 2); mais si de A on mène du même côté de DC, une droite AE quelconque, l'angle EAC sera < BAC, tandis que EAD > BAD ou BAC; donc EAC < EAD, et la droite AE est oblique. Donc, etc.

Corollaire. Soit une droite HF, perpendiculaire à GI;

placez le point F sur A, et la droite GI sur DC; couchez le plan GHI sur le plan DBC; la droite FH devra, après cette transposition, être perpendiculaire à DC; donc elle coïncide avec AB, et l'angle droit GFH coïncide avec DAB et lui est égal. Donc *tous les angles droits sont égaux.*

Déf. 3. — Fig. 4. Tout angle EAC plus petit qu'un angle droit est appelé angle *aigu*. Tout angle EAD plus grand qu'un angle droit est appelé angle *obtus*.

Deux angles sont dits de même espèce s'ils sont tous les deux ou aigus, ou droits, ou obtus.

Déf. 4. Deux angles dont la somme est égale à deux angles droits sont dits *supplémentaires ;* on dit encore que l'un est le *supplément* de l'autre.

Remarque 1. Deux angles qui ont le même supplément sont évidemment égaux.

Remarque 2. Le supplément d'un angle droit est lui-même un angle droit.

PROPOSITION II.

Théorème. — Fig. 5.

Toutes les fois qu'une ligne droite CD *en rencontre une autre* AB, *les angles adjacents* ADC, CDB, *sont supplémentaires.*

Car si au point D on mène la droite DE perpendiculaire à AB, l'angle ADC se composera de ADE+EDC; donc ADC+CDB=ADE+EDC+CDB; or, ADE est un angle droit; EDC+CDB forme l'angle droit EDB; donc ADC+CDB vaut deux angles droits.

Corollaire. — Fig. 4. Si l'un des deux angles adjacents était droit, l'autre le serait aussi (déf. 4, rem. 2). Par conséquent, pour qu'une droite HF (fig. 4) soit perpendiculaire à une autre GI, il suffit que l'un des deux angles adjacents GFH, IFH soit droit, puisque dès lors l'autre l'est aussi (déf. 2). Donc si une droite FH est perpendiculaire à une autre GI, réciproquement GF est aussi perpendiculaire à HK; car HF

étant perpendiculaire à GI, l'angle GFH est droit, ce qui suffit pour que GF soit perpendiculaire à HK.

Remarque.—Fig. 5. Si du point D on tire du même côté de AB tant de droites qu'on voudra, la somme des angles consécutifs ADH, HDG, GDC, etc., est la même que celle des deux angles droits ADE, EDB.

PROPOSITION III.

Théorème. — Fig. 5.

Réciproquement si deux angles adjacents ADC, CDB, *font en somme deux angles droits, les côtés extérieurs* AD, DB, *seront en ligne droite.*

Car si DB n'était pas le prolongement de AD, soit DK ce prolongement; la ligne ADK serait droite, et la somme des angles ADC+CDK serait égale à deux droits; mais si cela était, la somme ADC+CDB serait plus petite que deux droits, ce qui n'est pas. Donc DK ne saurait être le prolongement de AD. Donc DB est ce prolongement.

PROPOSITION IV.

Théorème. — Fig. 6.

Si deux droites AB, CE, *se coupent, les angles opposés au sommet sont égaux.*

En effet, AB étant une ligne droite, l'angle ADC est supplémentaire de CDB (p. 2); par une raison semblable, le même angle ADC est supplémentaire de ADE; donc les deux angles ADE, CDB ont le même supplément et sont égaux (déf. 4, r. 1). On prouve de même que ADC = BDE.

Remarque 1. La somme des 4 angles formés autour du point D vaut 4 angles droits. Car (p. 1) la somme des angles ADC + CDB vaut 2 droits, de même que la somme des angles ADE+EDB.

En général, si d'un point D on mène, dans différentes

directions, tant de droites qu'on voudra, la somme des angles consécutifs ainsi formés sera la même que celle des angles ADC, CDB, BDE, EDA, laquelle vaut quatre angles droits.

Remarque 2. Deux portions de droites AD, DC, font proprement entre elles deux angles, dont un seul a été considéré jusqu'ici; l'autre, plus grand que 2 droits, est ici la somme des trois angles ADE, EDB, BDC. Ce qui vient d'être dit complète la notion de la *somme* des angles.

Déf. 5.—Fig. 7. Lorsque deux droites AB, CD, sont coupées par une troisième EF, celle-ci prend, par rapport aux deux autres, le nom de *sécante* ou *transversale*. En accouplant un angle en G avec un angle en H, on obtient divers couples que l'on distingue d'après les conventions suivantes:

On appelle 1° *alternes* deux angles situés de côtés différents de la sécante; tels sont EGB, EHC;

2° *Angles du même côté*, deux angles pris du même côté de la sécante, comme EGB, EHD;

3° *Interne*, tout angle traversé par une des deux droites AB, CD : tel est EHD, que traverse GB;

4° *Externe*, tout angle que ne traverse aucune de ces mêmes droites, par exemple, l'angle EGB.

Combinant ces dénominations, on appellera :

1° Angles *alternes internes*, les angles BGF, CHE, ou AGF, EHD;

2° Angles *alternes externes*, 2 couples : EGB, CHF, ou AGE, DHF;

3° *Internes externes* (sous-entendu *d'un même côté*);

4 couples : EGA, EHC; AGF, CHF; EGB, EHD; BGF, DHF; on les appelle aussi *correspondants;*

4° *Internes* d'un même côté, 2 couples : AGF, CHE; BGF, DHE;

5° *Externes* d'un même côté, 2 couples : EGA, CHF; EGB, DHF.

Remarque. Deux droites indéfinies, situées dans un plan, ne peuvent offrir que deux cas : ou elles se rencontrent, ou elles ne se rencontrent pas.

Déf. 6. Deux droites AB, CD (fig. 8), sont dites *parallèles*,

si, prolongées indéfiniment, elles ne se rencontrent pas.
Deux droites qui se rencontrent sont dites *concourantes*.

PROPOSITION V.

THÉORÈME. — FIG. 8.

Deux droites AB, CD, *sont parallèles, si par rapport à une sécante quelconque* EF,

Deux angles { 1° *alternes externes*, 2° *alternes internes*, 3° *internes externes* } *sont égaux;* { 4° *internes*, 5° *externes* } *d'un même côté sont supplémentaires.*

1° Supposons que les angles alternes internes AGF, DHE soient égaux. Je dis que les droites AB, CD ne pourront pas se rencontrer. En effet, admettons, s'il est possible, qu'elles puissent se rencontrer à droite de EF. Puisque les angles AGF, DHE sont égaux, leurs suppléments BGH, CHG le seront aussi. Cela posé, soit la figure B'G'H'D' égale à BGHD, de façon que G'H'=GH, l'angle B'G'H'=BGH et D'H'G'=DHG. Cette figure pourra se superposer avec BGHD ; savoir : G'H' sur son égal GH, l'angle H'G'B' sur HGB, et en même temps G'H'D' sur son égal GHD. Si donc les droites GB, HD se rencontrent vers la droite, G'B', H'D' se rencontreront aussi. Or, je dis que la figure AGHC est aussi égale à B'G'H'D' : en effet, on peut placer GH sur H'G', le point H en G', le point G en H'; l'angle AGH, égal à GHD, coïncidera avec G'H'D' qui est égal à GHD; et GHC, égal à BGH, coïncidera de même avec B'G'H'. Si donc G'B', H'D' se rencontrent, il en sera de même de GA et de HC; donc les droites AB, CD se rencontreraient aussi bien à gauche de EF qu'à droite, et ces deux droites AB, CD auraient deux points communs sans se confondre, ce qui est impossible (prél., déf. 5). Donc elles ne se rencontrent pas, et sont parallèles.

Si l'on avait supposé égaux les angles alternes internes BGH, CHG, on en aurait conclu que AGF=DHE, et on aurait raisonné de même.

2° Supposons que les angles alternes externes EGB, CHF soient égaux; il en résulte que leurs opposés au sommet AGF, DHE sont égaux, ce qui ramène au premier cas.

De même si l'on suppose AGE=DHF, on en conclura l'égalité de leurs suppléments AGF, DHE.

3° Considérons l'un des quatre couples d'angles internes externes, par exemple, EGB, EHD : s'ils sont égaux, on en conclura que AGF, opposé au sommet avec le premier, est égal au second, ce qui est le premier cas. Si BGF=DHF, l'angle CHG, opposé au sommet au dernier, sera égal au premier, et ce sont des angles alternes internes. De même des deux autres couples.

4° Admettons que les angles internes du même côté AGF, CHE soient supplémentaires; l'angle DHE, supplément du second, sera par suite égal au premier, AGF, qui avec DHE forme des angles alternes internes égaux. Si ce sont les angles BGF, DHE qui sont supplémentaires, l'angle AGF, supplément du premier, donnera avec le second DHE, deux angles alternes internes égaux.

5° Enfin, si les angles externes d'un même côté AGE, CHF sont supplémentaires, il s'ensuivra que AGH, supplément du premier, est égal à GHD, opposé au sommet du second; donc, etc. De même si EGB est supplément de DHF, on verra que AGH, égal au premier, est aussi égal à DHE supplément du second, etc.

Corollaire.— Fig. 9. Deux droites AB, CD, perpendiculaires à une même troisième EF, sont parallèles. Car les angles alternes internes AGF, DHE sont égaux, comme droits; donc AB, CD sont parallèles. Il s'ensuit que d'*un point pris hors d'une droite* on ne saurait mener plus d'une perpendiculaire à cette droite.

PROPOSITION VI.

Postulatum. — Fig. 9.

Nous admettons que d'*un point* H *pris hors d'une droite* AB, *on ne peut mener qu'une seule parallèle à cette droite*,

de sorte que si HD est parallèle à AB, toute droite HK, H'K' autre que CD, rencontrera AB, si l'on prolonge indéfiniment ces droites.

PROPOSITION VII.

Théorème. — Fig. 10.

Deux droites AB, CD *se rencontrent si elles font avec une sécante* EF :

Des angles
1° alternes internes / *2° alternes externes* / *3° internes externes* — *inégaux ;*
4° internes / *5° externes* — *d'un même côté, non supplémentaires.*

1° Soit l'angle BGH < CHG ; si au point G on fait l'angle B'GH égal à CHG, la droite B'G sera parallèle à CD (p. 5) ; mais dans ce cas GB ou AB ne saurait être parallèle à CD (p. 6) ; donc AB et CD se rencontreront.

Même raisonnement pour les autres cas.

PROPOSITION VIII.

Théorème. — Fig. 8.

Si deux parallèles AB, CD *sont coupées par une sécante* EF,

Les angles
1° alternes internes / *2° alternes externes* / *3° internes externes* — *sont égaux ;*
4° internes / *5° externes* — *d'un même côté sont supplémentaires.*

Car sans cela les droites AB, CD ne seraient pas parallèles (p. 7).

Corollaire. — Fig. 9. Si une sécante EF est perpendiculaire à une droite AB, cette sécante EF est aussi perpendiculaire à toute droite CD, parallèle à AB ; car les angles alternes internes AGH, GHD seront égaux ; mais EF étant perpendiculaire à AB, l'angle AGH est droit ; donc GHD est aussi un angle droit, et EF est perpendiculaire à CD.

PROPOSITION IX.

Théorème. — Fig. 11.

Deux droites AB, CD *respectivement perpendiculaires à deux droites concourantes* AE, CE, *se coupent.*

Car si AB, CD étaient parallèles, AE, qui est perpendiculaire à AB, le serait aussi à CD (p. 8, c.). Mais EC est aussi perpendiculaire à CD; donc deux droites AE, EC, perpendiculaires à une même droite se couperaient, ce qui ne se peut (p. 5, c.).

PROPOSITION X.

Théorème. — Fig. 12.

Deux angles qui ont les côtés respectivement, soit parallèles, soit perpendiculaires, sont égaux ou supplémentaires.

1° Soient les angles BAC, DEF, ayant les côtés AB, DE parallèles et dirigés dans le même sens par rapport à la droite qui joindrait les sommets A et E; les côtés AC, EF sont aussi parallèles et de même sens. Ces angles sont égaux. Pour le prouver, prolongez le côté DE jusqu'à la rencontre de AC en G. Les angles DEF, DGC sont égaux comme correspondants par rapport aux parallèles AC, EF, coupées par la sécante DG (p. 8, 3°); les angles DGC, BAC sont égaux, comme correspondants par rapport aux parallèles AB, DG, coupées par la sécante AC; donc les angles DEF, BAC, égaux à un même angle DGC, sont égaux entre eux.

S'il s'agit des angles DEF, BAH, dont les côtés DE, AB sont parallèles de même sens, tandis que AH et EF sont parallèles de sens contraire, on prolonge AH vers C; d'après ce qu'on vient de prouver, l'angle BAC sera égal à DEF; mais BAH est le supplément de BAC; donc BAH est aussi le supplément de DEF.

Enfin, si l'on veut comparer les angles DEF, HAI, qui ont les côtés parallèles et de sens contraire, on prolongera

les côtés de l'angle HAI et l'on aura BAC, qui est égal à DEF, d'après ce qu'on vient de prouver, et à HAI, d'après la proposition 4. Donc DEF=HAI.

Ainsi, deux angles qui ont les côtés parallèles sont égaux, si les côtés de l'un sont tous les deux dirigés, ou dans le même sens que les côtés correspondants de l'autre, ou en sens contraire; ils sont supplémentaires, si un côté de l'un est de même sens qu'un côté de l'autre, tandis que le second côté du premier est de sens contraire au second côté de l'autre.

2° Soient les angles BAC, (fig. 13) *bac*, le côté *ab* étant supposé perpendiculaire à AB, *ac* à AC. Supposons l'angle BAC aigu, et au point A élevons au-dessus de AC les droites AC', AB', respectivement perpendiculaires à AC, AB. Les droites AC', *ac*, étant perpendiculaires à AC, sont parallèles (p. 5, c.); de même AB' est parallèle à *ab*; donc des deux angles en *a* l'un est égal à B'AC', l'autre est le supplément de B'AC'. Mais l'angle B'AC'=B'AC—C'AC, et BAC=B'AC—B'AB; or, les angles B'AB, CAC' sont droits; donc BAC=B'AC'. Donc aussi, des deux angles *bac'*, *bac*, l'un est égal à BAC, l'autre en est le supplément. Si l'angle BAC n'est pas aigu, on prolonge CA vers D pour former avec AB un angle aigu, et l'on raisonne comme on vient de le faire.

PROPOSITION XI.

THÉORÈME. — FIG. 14.

Deux droites AB, CD, *parallèles à une troisième* EF, *sont parallèles entre elles.*

Menez une droite quelconque GH perpendiculaire à EF; puisque AB est parallèle à EF, la droite GH sera aussi perpendiculaire à AB (p. 8, c.). De même CD étant parallèle à EF, GH sera perpendiculaire à CD; donc les droites AB, CD sont perpendiculaires à une même droite GH, et par conséquent elles sont parallèles (p. 5, c.).

DÉF. 7. On appelle *polygone* (fig. 20, 27, 31, etc.) toute

figure plane limitée par des droites AB, BC..., dont chacune est terminée à ses intersections avec *deux autres*, et dont l'ensemble est nommé le *contour* ou *périmètre* du polygone. Ces droites sont elles-mêmes nommées les *côtés* du polygone; les angles qu'elles comprennent, chacune avec les côtés auxquels elle se termine, se nomment les *angles* du polygone. Angles et côtés sont appelés les *éléments* du polygone. (Au lieu du mot *angle*, nous emploierons le signe $\wedge$.)

Déf. 8. Le polygone de trois côtés se nomme *triangle* (Δ) (fig. 15). — Le Δ a trois angles A, B, C. — Chaque côté AB, AC, BC, est *opposé* à un angle C, B, A.

Les côtés comparés ne peuvent présenter que trois cas : 1° Ils sont égaux tous les trois; 2° il y en a deux qui sont égaux; 3° ils sont tous inégaux.

Déf. 9. Le Δ qui a ses trois côtés égaux est nommé Δ *équilatéral* (fig. 15, A'B'C').

Déf. 10. Celui qui a deux côtés égaux est nommé Δ *isocèle* (fig. 15, A''B''C'', A'''B'''C''').

Déf. 11. Celui qui n'a pas de côtés égaux est appelé Δ *scalène*, ou simplement *triangle*.

PROPOSITION XII.

Théorème. — Fig. 16.

Dans un même Δ à des côtés égaux sont opposés des angles égaux, et réciproquement.

1° Soit dans le Δ ABC, le côté AB=AC, je dis que $\wedge$ B=C.

Pour le prouver, regardez le Δ ABC comme la réunion de deux Δ superposés, ABC, A'B'C'; prenant le Δ A'B'C', placez le côté A'C' sur AB qui lui est égal, vu que AC=AB; l'angle C'A'B' coïncidera avec BAC, et le côté A'B' avec son égal AC; par suite C'B' se superposera avec BC; l'angle C' coïncidant avec $\wedge$ B, sera =B; mais C est le même $\wedge$ que C'; donc $\wedge$ B=C.

2° Réciproquement, soit $\wedge$ B=C, je dis que côté AC=AB.

En effet, prenant encore le $\Delta A'B'C'$, placez le point C' sur B, B' sur C; l'$\wedge C'$ coïncidera avec son égal B, vu que $C=B$, et le côté $C'A'$ se dirigera sur BA ; de même, $\wedge B'$ coïncidera avec C, et le côté $B'A'$ se dirigera sur CA. Donc le point A' tombera sur A, et le côté $C'A'=BA$; par suite $CA=BA$.

Corollaire. 1° Dans tout Δ isocèle, les angles opposés aux côtés égaux sont égaux, et réciproquement.

2° Dans tout Δ équilatéral les trois angles sont égaux, puisque les trois côtés le sont. Réciproquement, un Δ qui a ses trois angles égaux, a aussi les trois côtés égaux.

3° Dans le Δ scalène il n'y a pas d'angles égaux, sans quoi les côtés opposés seraient égaux.

PROPOSITION XIII.

Théorème. — Fig. 17.

De deux côtés AB, AC *d'un* Δ ABC, *le plus grand est celui qui est opposé à un plus grand angle, et réciproquement.*

1° Soit $\wedge ABC > C$; je dis que côté $AC > AB$. Car puisque $\wedge ABC > C$, on peut faire dans celui-là un $\wedge DBC=C$, et par *prop.* 12, on aura le côté $DC=DB$. Mais $AB < AD+BD$, donc $AB < AB+DC$, ou $AB < AC$.

2° Si dans le Δ ABC on suppose le côté $AC > AB$, je dis $\wedge ABC$ est $> C$. En effet l'angle ABC ne saurait être $=C$, sans quoi le côté AC serait égal à AD (p. 12, 2°) ; l'angle ABC ne saurait non plus être $<C$, sans quoi, comme on vient de le prouver, le côté AC serait $<AB$. Donc $\wedge ABC$ est $>C$.

PROPOSITION XIV.

Théorème. — Fig. 18.

Dans tout Δ ABC *la somme des angles est égale à deux droits.*

Prolongez un côté AC vers D ; du point C menez CE parallèle à AB ; à cause des parallèles AB, CE coupées par la sécante AD, les angles internes externes BAC, ECD sont

égaux. A cause des mêmes parallèles coupées par BC, les ∧ alternes internes ABC, ECB sont égaux ; ainsi ∧ ABC +BAC=BCE+ECD. Ajoutant de part et d'autre BCA, on voit que la somme des ∧ du Δ est la même que celle des trois ∧ consécutifs formés autour de C, c'est-à-dire qu'elle vaut deux droits (p. 2, c. 2).

Remarque 1. Un Δ ne peut donc avoir ni deux angles droits, ni un ∧ droit et un ∧ obtus, ni deux ∧ obtus, ce qu'on voit d'ailleurs : car (fig. 19) deux droites AB, CD perpendiculaires à une même troisième AC, ne peuvent se rencontrer, et par suite deux droites AB, CD' faisant l'une avec AC un ∧ droit, l'autre un ∧ obtus, ne peuvent former avec AC un Δ, non plus que deux droites AB', CD' qui font avec AC des ∧ obtus.

Remarque 2. Deux Δ qui ont deux ∧ égaux chacun à chacun, ont aussi le troisième égal de part et d'autre.

Remarque 3. On vient de prouver que l'angle *extérieur* BCD du Δ ABC (fig. 18), vaut la somme des angles intérieurs opposés A et B.

Déf. 12. Le Δ ABC (fig. 20) qui renferme un ∧ droit A, est appelé Δ *rectangle;* le côté BC opposé à l'angle droit est nommé *hypothénuse;* les deux côtés de l'angle droit AB, AC sont appelés *cathètes*. Puisque les trois ∧ valent deux droits, il s'ensuit que les deux ∧ aigus B, C valent ensemble un ∧ droit.

Déf. 13. Deux figures sont dites égales, si on peut les superposer de façon que chaque point de l'une coïncide avec un point de l'autre, réserve faite des angles par rapport auxquels l'égalité est toujours entendue, comme on l'a expliqué à la suite de *déf.* 1.

PROPOSITION XV.

Théorème. — Fig. 21.

Deux Δ ABC, DEF, *sont égaux s'ils ont un côté égal* (AB=DE) *adjacent à des angles respectivement égaux* (A=D, B=E).

Placez le côté DE sur son égal AB, le point D sur A, E sur B. Comme $\wedge$ D=A, la droite DF prendra la direction de AC, et comme $\wedge$ E=B, la droite EF prendra la direction de BC. Donc le point F tombera en C, et les deux Δ sont égaux. Il s'ensuit que $\wedge$ F=C, côté AC=DF, côté BC=EF.

Remarque. Un côté et les deux $\wedge$ adjacents déterminent le Δ. Car tous les Δ qui renfermeront ces trois mêmes éléments seront égaux entre eux.

PROPOSITION XVI.

THÉORÈME. — FIG. 21.

Deux Δ ABC, DEF *sont égaux s'ils ont un côté égal* (AB=DE), *un* $\wedge$ *adjacent égal* (A=D) *et l'* $\wedge$ *opposé égal* (C=F).

Car dès lors l'$\wedge$ B=E (p. 14, r. 2), et on retombe sur la p. 15.

Remarque. Un côté, un angle adjacent, et l'angle opposé, déterminent le Δ.

PROPOSITION XVII.

THÉORÈME. — FIG. 21.

Deux Δ ABC, DEF *sont égaux s'ils ont un* $\wedge$ *égal* (A=D), *compris entre deux côtés égaux chacun à chacun* (AB=DE, AC=DF).

Placez $\wedge$ D sur son égal A, le côté DE sur AB, le côté DF sur AC; comme DE=AB, et DF=AC, le point E tombera en B, le point F en C, et les deux Δ coïncideront; donc CB=EF, $\wedge$ B=E, C=F.

Remarque. Un $\wedge$ et les deux côtés qui le comprennent déterminent le Δ.

PROPOSITION XVIII.

THÉORÈME. — FIG. 22.

Deux Δ ABC, DEF, *sont égaux s'ils ont deux côtés respec-*

tivement égaux (AB=DE, AC=DF) *et l'angle opposé à un de ces côtés, aussi égal* (B=E), *pourvu que les angles* C, F *opposés aux autres côtés égaux soient de même espèce.*

Puisque ∧ B=E, on peut placer ∧ E sur B, de façon que DE qui =AB, coïncide avec AB, le point D tombant en A ; EF prendra la direction de BC, et je dis que le point F tombera en C. Car s'il tombait sur un autre point C′ la droite DF tomberait sur AC′ ; donc AC′, AC, égales à DF, seraient égales entre elles, le Δ ACC′ serait isocèle, et l'∧ C=AC′C ; d'ailleurs ∧ F serait égal à AC′B. Donc ∧ AC′B serait de même espèce que C, ou que son égal AC′C, ce qui ne se peut, à moins que ces angles en C′ ne soient droits. Si donc C et F ne sont pas droits, le point F tombera sur C ; s'ils sont droits, il y tombera encore, sans quoi deux droites AC, AC′, perpendiculaires à une même droite CB se rencontreraient. Donc, enfin, les Δ ABC, DEF sont égaux.

Corollaire. Toutes les fois que le côté AC est > AB, l'∧ B est > C ; de même E > F ; donc dans ce cas les ∧ C, F sont aigus (p. 12, p. 14, r. 1), et par suite, de même espèce ; ainsi les Δ sont égaux.

Déf. 14. Deux figures rectilignes sont dites *équilatérales* entre elles si chaque côté de l'une a son égal dans l'autre.

Déf. 15. Deux figures rectilignes sont dites *équiangles* entre elles si chaque angle de l'une a son égal dans l'autre.

PROPOSITION XIX.

Théorème. — Fig. 23.

Deux Δ ABC, DEF *sont égaux, s'ils sont équilatéraux entre eux.*

Soit DE=AB, DF=AC, EF=BC. Placez DE sur son égal AB, et le triangle DEF, au-dessous de ABC, en AC′B, tirez CC′. On aura AC′=DF=AC, BC′=FE=BC, le Δ AC′C sera isocèle, de même que BC′C. Il s'ensuit (p. 12) que ∧ ACC′=AC′C et ∧ BCC′=BC′C ; par conséquent ACC′+BCC′=AC′C+BC′C, c'est-à-dire ∧ ACB=AC′B ; mais ∧ AC′B=F ; donc

ACB = F, et les Δ ABC, DEF ayant un ∧ égal entre côtés égaux sont égaux ; de sorte que ∧ CAB = D, ∧ CBA = E.

Remarque 1. Un Δ est déterminé par ses trois côtés.

Remarque 2. Dans deux Δ égaux les côtés égaux sont opposés à des ∧ égaux.

PROPOSITION XX.

Théorème. — Fig. 24.

Si d'un point A *pris hors d'une droite* BC, *on mène une droite* AD *perpendiculaire à* BC, *et diverses obliques* AE, AF, *etc.*, je dis que :

1° *La perpendiculaire est plus courte que toute oblique ;*

2° *Des obliques* AE, AF, *dont les pieds* F, E *sont également écartés de celui de la perpendiculaire, sont égales et également inclinées sur la perpendiculaire, et réciproquement ;*

3° *De deux obliques* AG, AF *dont les pieds* G, F, *sont inégalement écartés de celui de la perpendiculaire, celle qui s'écarte le plus est la plus longue, et fait avec la perpendiculaire le plus grand* ∧, *et réciproquement.*

1° Dans le Δ ADE, l'angle droit ADE est > ∧ AED (p. 14, r. 1) ; donc AE > AD (p. 13).

2° De ce que DE = DF, il suit que les Δ ADE, ADF ont un ∧ égal en D, entre côtés égaux ; donc ils sont égaux (p. 17), et AF = AE, ∧ DAF = DAE. Réciproquement si AE = AF, les Δ ADE, ADF ont deux côtés respectivement égaux, et l'angle en D opposé au plus grand côté égal ; donc ils sont égaux (p. 18), et DE = DF, etc.

3° DG étant > DF, si on prend DE = DF, qu'on tire AE, l'∧ AED est aigu, vu que dans le Δ ADE, l'∧ en D est droit (p. 14, r. 1). Donc ∧ AEG est obtus, et le plus grand ∧ du Δ AEG ; par suite côté AG > AE ou que AF. D'ailleurs ∧ GAD > EAD ou FAD. Réciproquement, si AG > AF, je dis que DG > DF. Car si DG était = DF, AG serait = AF, et si DG était < DF, AG serait < AF ; donc, etc.

Remarque. La réciproque de la deuxième partie peut

être énoncée ainsi : *dans tout* Δ *isocèle* AEF, *la perpendiculaire menée du point de concours* A *des côtés égaux, sur le troisième côté* EF, *tombe au milieu de ce côté, et divise l'angle* EAF *en deux parties égales.*

Déf. 16. On appelle distance d'un point à une droite, la ligne la plus courte menée de ce point sur la droite. Cette distance est donc la perpendiculaire menée du point sur la droite.

Déf. 17. Si tous les points d'une ligne jouissent exclusivement d'une propriété commune, cette ligne est appelée le *lieu* de ces points.

PROPOSITION XXI.

Théorème. — Fig. 25.

La perpendiculaire CD *menée au milieu* E *d'un segment de droite* AB, *est le lieu des points également distants des extrémités de ce segment.* (Il ne s'agit que des points du plan CAB).

Soit C un point de la perpendiculaire CD ; tirez CA, CB : puisque EA=EB, il s'ensuit que (p. 20, 2°) CA=CB — De même DA=DB, etc.

Que si F est un point pris hors de CD, tirez les droites AF, BF, et du point F menez FG perpendiculaire à AB; les droites FG, CD, perpendiculaires à une même droite AB, ne pouvant se couper, il s'ensuit que le point G sera au delà de E relativement à B ; donc par rapport à la perpendiculaire FG, l'oblique FB < FA (p. 20, 3°). Donc tout point pris sur la perpendiculaire CD est également distant de A et B, tandis qu'un point quelconque F pris hors de la perpendiculaire est inégalement distant de A et B. D'ailleurs, tout point F pris du même côté de la perpendiculaire que B, est plus près de B que de A.

PROPOSITION XXII.

Théorème. — Fig. 26.

Si dans un Δ ABC, *sans changer la longueur des deux cô–*

tés AB, AC, *on change l'angle compris* BAC, *le côté opposé* BC *changera dans le même sens que l'angle, et réciproquement.*

Soit CAD un nouveau Δ ayant le côté AC commun avec ABC, le côté AD=AB, l'angle CAD < CAB; je dis que CD sera < BC. En effet, tirez BD, et menez AE perpendiculaire à cette ligne; les obliques égales AB, AD seront également inclinées sur AE; ainsi, ∧ BAE=EAD, et comme ∧ BAC > CAD, AE passe dans l'∧ BAC; donc le point C est, par rapport à AE, du même côté que D, et DC est < BC.

En second lieu, puisque le côté BC augmente ou diminue en même temps que ∧ BAC, et que ce côté ne changerait pas si l'∧ BAC ne changeait pas, il s'ensuit que si le côté diminue, il faut que ∧ BAC ait diminué. Donc, etc.

Déf. 18. Un polygone est dit *convexe* s'il est situé tout entier d'un même côté par rapport à chacun de ses côtés, même supposé prolongé indéfiniment.

ABCDEF (fig. 27), est un polygone convexe. La fig. 28 est un polygone non convexe; le côté DC prolongé divise le polygone en deux parties.—La figure 29 présente un polygone *étoilé* : on nomme ainsi tout polygone dans lequel un côté en coupe plus de deux autres, sans être prolongé. Le côté AB en coupe quatre. — Un pareil polygone peut être considéré comme un assemblage de polygones non étoilés : nous ferons donc abstraction de cette espèce de figures.

Déf. 19. Une *diagonale* d'un polygone est une droite qui joint deux sommets non adjacents; dans le polygone ABCD (fig. 32), AC, BD sont des diagonales.

PROPOSITION XXIII.

Théorème.

Tout polygone de n *côtés, étoilé ou non, a* $\frac{n(n-3)}{2}$ *diagonales.*

Dans un polygone étoilé nous ne regardons pas toutes les intersections des côtés comme des sommets : chaque côté est supposé renfermer deux sommets et pas plus.

Chaque sommet peut être joint à $n-3$ autres, ce qui forme $n(n-3)$ droites, mais dans ce nombre chaque diagonale est évidemment comptée deux fois ; donc le nombre cherché est $\frac{n(n-3)}{2}$.

PROPOSITION XXIV.

Théorème. — Fig. 27 et 28.

Dans tout polygone la somme des angles est égale à deux angles droits multipliés par le nombre des côtés, moins quatre angles droits.

Dans chacune des figures on peut former autour du point intérieur O, autant de Δ que le polygone a de côtés; la somme des $\wedge$ de chaque Δ valant deux droits, la somme des $\wedge$ de tous ces Δ vaut deux droits multipliés par le nombre des côtés; or, de cette somme, il suffit de retrancher les quatre droits, valeur des $\wedge$ consécutifs en O, pour avoir la somme des $\wedge$ du polygone. Donc, etc.

Cette démonstration suppose que le polygone soit tel, que dans son intérieur il existe un point d'où l'œil d'un spectateur puisse voir tous les sommets sans qu'aucun de ceux-ci lui soit caché par un côté interposé. La figure 30 ne remplit pas cette condition. Dès lors on prendra au-dedans de la figure un point quelconque O, et on y supposera placé un *œil* ayant la vue libre dans toutes les directions sur le plan. Parmi les sommets il y en aura un certain nombre, comme A, D, E, G, P, qui seront *vus* du point O ; on les joindra à ce point; d'autres — B, C, F, H, ne sont pas vus de O. — Toutes les fois que deux des *rayons* OA, OD, OE vont aux extrémités d'un même côté, ils déterminent avec ce côté un Δ; exemple DOE, AOR. — Si deux rayons consécutifs AO, OD, n'aboutissent pas à un même côté, on joindra leurs extrémités A, D, par une diagonale. On formera ainsi autour de O une série de Δ additifs, dont chacun a deux sommets communs avec le polygone donné. Au dehors de ce système de Δ il restera des polygones, ABCD, etc., que l'on traitera comme le polygone proposé. On parviendra ainsi à décomposer la figure donnée, en Δ tous *additifs*. Or, soit n le nombre des côtés, n' le nombre des diagonales que l'on a été dans le cas de tirer: $n'+1$ sera le nombre des points d'assemblage O, O', O''. — Chaque côté du polygone détermine un Δ ; chaque diagonale en détermine deux : en tout, $n+2n'$ Δ, ce qui donne pour la somme de leurs angles $2(n+2n')$ angles droits; mais les angles formés autour de O, O', O'' valent $4(n'+1)$; reste pour les angles du polygone

$$2(n+2n')-4(n'+1) \text{ ou } 2n-4.$$



Corollaire. Dans le polygone de quatre côtés, la somme des $\wedge$ sera 2.4—4=4 droits.

Dans le polygone de cinq côtés, la somme des $\wedge$ sera 2.5—4=6 droits.

Dans le polygone de six côtés, la somme des $\wedge$ sera 2.6—4=8 droits.

Déf. 20. Le polygone de quatre côtés se nomme *quadrilatère* (fig. 31–35).

Déf. 21. Un quadrilatère (fig. 31) s'appelle *trapèze* s'il a deux côtés parallèles AB, CD. Les angles A et D sont par conséquent supplémentaires, de même que B et C.

Déf. 22. Le parallélograme ($\varnothing$) est (fig. 32–35) un quadrilatère dont les côtés opposés soit parallèles : AB à CD, BC à AD. Dans cette figure les $\wedge$ opposés sont égaux (p. 10, 1°), savoir : A=C, B=D.

PROPOSITION XXV.

Théorème. — Fig. 32.

Dans tout $\varnothing$ ABCD les côtés opposés sont égaux, savoir : AB=CD, AD=BC.

Tirez une diagonale AC, les Δ ADC, ABC auront le côté AC commun, l'$\wedge$ B=D (d. 22); les $\wedge$ CAB, DCA sont égaux comme alternes internes à cause des parallèles AB, CD et de la sécante AC, donc ces Δ sont égaux ; par suite AB=CD, AD=BC.

Remarque. D'après cette proposition, deux segments de parallèles AB, CD, compris entre des parallèles, sont égaux. Si les droites (fig. 33) AB, CD sont perpendiculaires à AD, elles le sont aussi à BC : donc deux parallèles AD, BC sont partout également distantes.

Déf. 23. Si l'un des $\wedge$ du $\varnothing$ est droit (fig. 33 et 34), la figure s'appelle *rectangle*.

Dans ce cas les quatre angles sont droits : car si A est droit, comme C=A, et que B, D sont respectivement suppléments de A, C, les quatre sont droits.

DÉF. 24. Si dans le ▱ deux côtés adjacents AB, AD sont égaux, on le nomme *lozange* (fig. 35); par suite les quatre côtés sont égaux.

DÉF. 25. Le rectangle qui a deux côtés adjacents égaux se nomme *carré* (fig. 34); cette figure a donc les quatre angles droits, et les quatre côtés égaux.

PROPOSITION XXVI.

THÉORÈME. — FIG. 32.

Un quadrilatère convexe ABCD *est un* ▱, 1° *si les côtés opposés sont égaux* AB=CD, AD=BC; 2° *si deux côtés opposés* AB, CD, *sont égaux et parallèles.*

1° Tirez la diagonale AC; les ∆ ABC, ADC seront équilatéraux entre eux. Donc (p. 25) ∧ DCA=CAB, et comme ces ∧ sont alternes internes par rapport à DC, AB, coupées par AC, on en conclut que DC, AB sont parallèles (p. 5). De même BC, AD sont parallèles. Donc, etc. (déf. 22).

2° AB, CD étant égales et parallèles, si l'on tire la diagonale AC, les ∆ ABC, ADC auront un ∧ égal DCA=CAB, entre côtés égaux, donc ces ∆ sont égaux; d'où il suit que ∧ ACB=DAC, et que les droites AD, BC sont parallèles; donc, etc. (déf. 22.)

PROPOSITION XXVII.

THÉORÈME.

Les diagonales du
- ▱ *se coupent en parties égales.*
- *lozange se coupent en parties égales et à angles droits.*
- *rectangle se coupent en parties égales, et sont égales.*
- *carré se coupent en parties égales et à angles droits, et sont égales.*

Les réciproques sont vraies.

Soit un ▱ ABCD (fig. 32-35) et ses diagonales AC, BD, se coupant en O.

Les Δ AOB, DOC, ont le côté AB=CD (p. 25); l'angle CAB=DCA à cause des parallèles AB, CD et de la sécante AC; l'angle ABD=CDB à cause des mêmes parallèles coupées par DB ; donc ils sont égaux (p. 15) et AO=CO, BO=DO.

Dans le lozange (fig. 35) et le carré (fig. 34) (qui est un lozange), les quatre côtés étant égaux, il suit que les Δ AOD, DOC sont équilatéraux entre eux ; donc ∧ AOD=DOC, et ces ∧ sont droits (déf. 1). Donc, etc.

Dans le rectangle ABCD (fig. 33), et dans le carré (fig. 34) qui est aussi un rectangle, les Δ ABD, ADC ont le côté AD commun, AB=CD, ∧ DAB=ADC; donc ils sont égaux, et (p. 17) AC=DB.

Quant aux réciproques, si les diagonales AC, BD (fig. 32–35) se coupent en parties égales, les Δ AOB, DOC auront un ∧ égal en O compris entre côtés égaux, et seront égaux. Ainsi ∧ CAB=DCA, et le côté AB sera égal et parallèle à DC ; donc ABCD est (p. 26) un ▱. Le reste s'achèvera sans peine.

PROPOSITION XXVIII.

Théorème. — Fig. 36.

Le contour d'un polygone convexe ABCD, *est plus petit que celui de toute ligne* abcdefa *qui l'enveloppe.*

Prolongez chacun des côtés AB, BC, CD, DA, en suivant le contour de ABCD dans un sens, jusqu'au contour enveloppant, en *a*, *c*, *d*, *e*. On aura les inégalités suivantes.

$$\begin{aligned} AB+Bc &< Aa+abc. \\ BC+Cd &< Bc+cd. \\ CD+De &< Cd+de. \\ DA+Aa &< De+efa. \qquad (1) \end{aligned}$$

Ajoutant ces inégalités, et supprimant de part et d'autre les longueurs communes Bc, Cd, De, Aa, il vient :

$$AB+BC+CD+DA < abc+cd+de+efa$$

ou contour ABCDA < contour *abcdefa*.

Remarque 1. Ce qui précède suppose que ABCDA est rectiligne; *abcdefa* peut être curviligne. On embrassera tous les cas ainsi qu'il suit : les lignes tracées sur le plan, sans qu'aucune entre dans l'espace ABCD, n'étant pas toutes de même longueur, il y en a une ou plusieurs dont la longueur sera la plus petite. Or supposons qu'une ligne *abcdfa* autre que ABCDA ait cette moindre longueur. ABCDA étant convexe, on pourra joindre deux points du contour *abcdefa* par une droite *ac* qui n'entre pas dans l'espace ABCD, et la ligne *abcdea* sera $<$ *abcdefa*; donc cette dernière n'est pas la ligne de moindre longueur. Même résultat tant qu'on supposera que la ligne de moindre longueur est autre que ABCDA.

Remarque 2. De même, toute ligne convexe CDA est $<$ une ligne *Cdfa*A qui l'enveloppe en se terminant aux mêmes points C, A.

PROPOSITION XXIX.

THÉORÈME. — FIG. 37.

Deux polygones de 4, 5, 6, etc., n *côtés sont égaux, s'ils ont* 3, 4, 5, etc., n—1 *côtés respectivement égaux, se succédant dans le même ordre et comprenant de part et d'autre des angles égaux.*

Soient, dans les polygones AD, A'D', les côtés AB, BC, CD, DE, EF respectivement égaux à A'B', B'C', C'D', D'E', E'F'; soit de plus $\wedge$ B=B', C=C', D=D', E=E'. Placez le côté A'B' sur son égal AB, le point A' en A, B' en B; l'angle B étant égal à B', le côté B'C' prendra la direction de BC, et comme B'C'=BC, le point C' tombera en C. Continuant ce raisonnement, on reconnaîtra que les sommets D', E', F' tomberont en D, E, F; par suite, le côté F'A' coïncidera aussi avec FA, et les polygones sont égaux.

Corollaire. 1° *Deux trapèzes* (fig. 31) ABCD, A'B'C'D' *sont égaux s'ils ont trois côtés respectivement égaux, parmi lesquels les côtés parallèles* AD=A'D', DC=D'C', AB=A'B', et

un ∧ égal compris entre côtés égaux, par exemple, ∧ D=D′. Car les ∧ A, A′ étant supplémentaires de D, D′, seront aussi égaux, et on rentrera dans p. 29.

2° *Deux* ▱ (fig. 32) *sont égaux s'ils ont un ∧ égal*, A=A′ *compris entre côtés égaux respectivement* AB=A′B′, AD=A′D′. Car on a (p. 25) DC=A′B′, D′C′=A′B′, d'où DC=D′C′, et l'on retombe dans *p*. 29.

3° *Deux lozanges sont égaux, s'ils ont un ∧ égal et un côté égal;* car les côtés adjacents à cet angle égal seront égaux, et l'on rentre dans 2°.

4° *Deux rectangles sont égaux s'ils ont les côtés adjacents respectivement égaux* (2°).

5° *Deux carrés sont égaux s'ils ont un côté égal.*

Remarque. Il y a dans les polygones encore d'autres cas d'égalité, c'est-à-dire que les éléments déterminants peuvent être choisis autrement. On peut, par exemple, y comprendre les diagonales. On peut aussi regarder le polygone comme composé de Δ, et la détermination sera ramenée à celle du Δ.

Sans décomposer le polygone en Δ, on peut employer cette dernière espèce de figure de la manière suivante : soit un polygone que je nomme ABCD.—Prenant un côté quelconque AB, on en joindra les extrémités A, B, à tous les autres sommets du polygone, ce qui donne les Δ ABC, ABD ; ces Δ connus, les sommets du polygone le sont. Or, quel que soit le Δ d'où l'on part, ABC par exemple, il faut pour ce Δ trois éléments; pour chacun des autres il en faut deux, vu que l'on a déjà le côté AB, qui fait partie de chacun. Soit *n* le nombre des sommets du polygone, ceux qui sont hors de AB sont au nombre de $n-2$; pour l'un d'eux, il faut trois éléments, et deux pour chacun des $n-3$ autres, total $3+2(n-3)$ ou $2n-3$. C'est aussi ce nombre-là qu'indique la *p*. 29. A la connaissance de ces éléments il faut joindre l'ordre dans lequel ils doivent se succéder.

Du reste, la construction d'une figure égale à une autre peut se faire d'après les propositions suivantes,

PROPOSITION XXX.

THÉORÈME. — FIG. 38.

Si de tous les points A, B, C, *d'une figure, on mène dans le même sens des droites* AA′, BB′, CC′, etc., *toutes égales et*

parallèles, les extrémités A′, B′, C′ *détermineront une figure égale à la figure donnée.*

Joignez AB, BC,... A′B′, B′C′,... Puisque AA′, BB′, CC′, sont égales et parallèles, les quadrilatères ABB′A′ BCC′B′,... sont des ▱. Donc A′B′, B′C′,... sont respectivement égales et parallèles à AB, BC, et l'angle ABC=A′B′C′. Si donc on place AB sur A′B′, BC prendra la direction B′C′, et le point C tombera en C′. On prouvera de même que tout autre point de la première figure coïncide avec un point de la seconde, et réciproquement. Donc, etc.

Corollaire. Fig. 39. Si l'une des figures est un polygone ABCDE, il suffit que les sommets A, B,... A′, B′,... remplissent les conditions énoncées ci-dessus.

Déf. 26.—Fig. 40. Deux points A, A′ sont dits *symétriques* par rapport à un point B, si le point B est le milieu de AA′.

Déf. 27.—Fig. 41. Deux figures ABCD, A′B′C′D′ (systèmes de points, lignes, ou surfaces) sont dits symétriques par rapport à un point O, si chaque point A,B,C de l'une a dans l'autre son symétrique par rapport à ce point O, nommé *centre de symétrie* des deux figures.

Déf. 28.—Fig. 42. Deux points A,A′ sont dits symétriques par rapport à une droite CB, si celle-ci est perpendiculaire au milieu de AA′.

Déf. 29.—Fig. 43. Deux figures ABCDEF, A′B′C′D′E′F′, sont dites symétriques par rapport à une droite OP; si chaque point A, B, C, de l'une a dans l'autre son symétrique par rapport à cette droite, nommée *axe de symétrie* des deux figures.

PROPOSITION XXXI.

Théorème. — Fig. 41 et 42.

Deux figures symétriques par rapport à un point, ou par rapport à une droite sont superposables.

1° Fig. 41. Soit O le centre de symétrie; tirant AO, BO, CO, et prolongeant ces lignes jusqu'aux points A′, B′ C′

symétriques de A, B, C, on a AO=A'O, BO=B'O, etc. Mais ∧ AOB=A'OB'; donc si on fait tourner A'B'C' autour de O, jusqu'à ce que OA' prenne la direction OA, le point A' tombera en A, OB' sur OB, B en B', etc. Donc les deux figures se superposeront.

2° Fig. 43. Soit OP l'axe de symétrie; on aura Aa=A'a, Bb=bB'; donc si on fait tourner une des parties aA'B'... de la figure autour de OP, aA' tombera sur aA, à cause des angles droits en a, et le point A' en A, de même B' en B..., les figures sont superposables.

Corollaire. 1° Deux polygones sont symétriques par rapport à un point ou à une droite, si leurs sommets forment deux systèmes symétriques, pourvu que les côtés soient déterminés de part et d'autre par des points symétriques.

2° Deux surfaces planes sont symétriques par rapport à un point ou à une droite, si les contours le sont.

Déf. 30. On appelle *centre de symétrie* ou *centre* d'une figure un point tel que chaque point de la figure ait son symétrique par rapport à ce centre dans la même figure. Tel est le point d'intersection des diagonales du ▱.

Déf. 31. On appelle *axe de symétrie* d'une figure, toute droite qui divise la figure en deux figures symétriques par rapport à cette droite.

Remarque. 1° Dans le Δ isocèle AEF (fig. 24), la droite menée du point de concours A des côtés égaux au milieu du troisième côté est un axe de symétrie.

2° Dans le lozange les diagonales sont des axes de symétrie (fig. 35).

3° Dans le rectangle (fig. 44), les droites qui joignent les milieux des côtés opposés sont des axes de symétrie.

4° Le carré a quatre axes de symétrie : c'est à la fois un lozange et un rectangle.

LIVRE II.

LES FIGURES PLANES :

GRANDEUR ABSOLUE DE LEURS ÉLÉMENTS.

LA DROITE ET LE CERCLE.

Le cercle et une droite : nombre de points communs, diamètres, cordes, sécantes, tangentes, pr. 1—6.

Le cercle et les systèmes de droites : angles au centre, à la circonférence, excentriques, extérieurs, polygones inscrits et circonscrits, pr. 6—16.

Deux cercles, pr. 17—21.

Cercles et droites, ou problèmes.

Déf. 1. — Fig. 45. *La circonférence du cercle* est une ligne courbe dont tous les points A, B, E, etc., sont également distants d'un point C situé dans le plan de cette ligne, et appelé *centre*. Le *cercle* est la portion de plan terminée par la circonférence.

Déf. 2. Toute droite CA, CE, etc., menée du centre à un point de la circonférence, se nomme *rayon*. Dans un même cercle tous les rayons sont égaux.

Déf. 3. Toute droite AB, passant au centre et terminée de part et d'autre à la circonférence, se nomme *diamètre*. Le diamètre est double du rayon. Le centre et le rayon se nomment les *éléments* du cercle.

Déf. 4. Un *arc* est une partie de la circonférence, telle que BF, EF, etc. La droite EF, qui joint les extrémités d'un arc, s'appelle la *corde* ou *sous-tendante* de l'arc.

PROPOSITION I.

THÉORÈME. — FIG. 45.

Une ligne droite ne saurait rencontrer une circonférence en plus de deux points.

Car si une droite pouvait rencontrer une circonférence en trois points D, E, F, les trois rayons CE, CD, CF seraient trois droites égales menées d'un même point C sur cette droite; or, de ces trois droites deux tomberaient d'un même côté de la perpendiculaire menée de C, et ne sauraient, par suite, être égales (l. I, p. 20, 3°).

Remarque. Une droite ne peut donc présenter que trois cas par rapport à la circonférence :

1° N'avoir aucun point commun
2° Avoir un point commun
3° Avoir deux points communs
} avec cette ligne courbe.

PROPOSITION II.

THÉORÈME. — FIG. 45.

Le diamètre est la plus grande corde.

Car soit une corde EF qui ne passe pas au centre; tirez les rayons CE, CF; on a $EF < EC + CF$ ou $< BC + CA$ ou $< BA$.

PROPOSITION III.

THÉORÈME. — FIG. 46.

Tout diamètre est un axe de symétrie du cercle.

Soit A le centre d'un cercle, DD′ un diamètre, BC une corde perpendiculaire à DD′; tirez les rayons AB, AC qui sont par rapport à AE des obliques égales; donc $BE = EC$. Donc C est le symétrique de B par rapport à DD′. De même tout point de DBD′ a son symétrique sur DCD′.

Remarque. De là il suit :

1° Que la ligne DBD′=DCD′, et que la surface D′DB=D′DC; ainsi tout diamètre divise le cercle et sa circonférence en deux parties égales ;

2° Que chacun des arcs BDC, BD′C a pour axe de symétrie le diamètre DD′, et comme en outre BE=CE, on conclura que le diamètre DD′, perpendiculaire à une corde BC, divise la corde et les deux arcs sous-tendus BDC, BD′C, chacun en deux parties égales;

3° Que le centre A, le milieu E d'une corde BC, et les milieux D, D′ des deux arcs sous-tendus BDC, BD′C sont quatre points en ligne droite, de sorte que toute droite qui passera par deux de ces points passera aussi par les deux autres, et sera perpendiculaire à la corde; de plus toute perpendiculaire abaissée d'un de ces quatre points, sur la corde, passera par les trois autres.

PROPOSITION IV.

Théorème. — Fig. 47.

Dans un même demi-cercle ou dans des demi-cercles égaux, deux cordes égales BC, EF *sous-tendent des arcs égaux, et sont également éloignées du centre. Réciproquement.*

Tirez AB, AC; DE, DF, et menez les rayons AG, DH, respectivement perpendiculaires aux cordes BC, EF; ils passeront aux points I, L, milieux de ces cordes (p. 3). Les triangles ABC, DEF, seront équilatéraux entre eux, et superposables, de sorte que D étant placé sur A, E sur B, F tombera sur C, et les circonférences coïncideront. Donc 1° les arcs BGC, EHF sont égaux. De plus L, milieu de EF tombera sur I, milieu de BC; donc 2° AI=DL, et les deux cordes égales sont également éloignées du centre.

Réciproquement, 1° si les arcs sont égaux, on pourra, en conservant le même centre, les superposer, et les cordes coïncideront;

2° Si DL=AI, ces deux droites pourront se superposer,

et EF tombera indéfiniment sur BC ; mais les circonférences coïncident aussi. Donc E tombe sur B, F en C, et les cordes BC, EF, également éloignées du centre, sont égales.

PROPOSITION V.

THÉORÈME. — FIG. 47.

Dans un même demi-cercle ou dans les demi-cercles égaux, de deux cordes inégales KM, EF, *la plus grande* KM *sous-tend le plus grand arc; 2° cette plus grande corde est la moins éloignée du centre. Réciproquement.*

1° Car dans les deux triangles KAM, EDF, les côtés AK, AM sont égaux à DE, DF ; le côté KM est plus grand que EF ; donc (l. I, p. 22) l'angle KAM sera plus grand que EDF. Cela fait, posons le point D sur A, le rayon DH, qui est perpendiculaire à EF, sur AG, qui est perpendiculaire à KM, l'angle EDF se placera dans l'angle KAM, et par conséquent l'arc BGC qu'il interceptera sera $<$ KGM.

2° La corde EF coïncidant avec BC, cette droite BC sera aussi perpendiculaire à AG ; or, évidemment AI$>$AO ; donc DL, qui est égal à AI, sera plus grand que AO. Donc KM est moins éloignée du centre que EF.

Réciproquement, 1° si l'on suppose l'arc KGM plus grand que l'arc EHF, on pourra conclure que la corde KM est $>$EF. En effet, soient G, H les milieux des arcs ; prenez GB$=$GC$=$EH ; l'arc BGC sera égal à EHF ; placez le centre D en A, l'arc EF sur son égal BC ; l'angle EDF sera contenu dans KAM, et les deux triangles KAM, EDF ayant d'ailleurs les côtés KA, MA égaux à ED, DF, il s'en suit (l. I, p. 22) que le côté EF est $<$MK.

2° Etc.

PROPOSITION VI.

THÉORÈME. — FIG. 48.

1° *Pour qu'une droite* BC *n'ait qu'un seul point* D *de*

commun avec une circonférence, il faut et il suffit qu'elle soit perpendiculaire au rayon AD *mené à ce point ;*

2° *Pour qu'une droite ait deux points communs avec une circonférence, il faut et il suffit que sa distance au centre soit moindre que le rayon ;*

3° *Pour qu'une droite n'ait aucun point commun avec une circonférence, il faut et il suffit que sa distance au centre soit plus grande que le rayon.*

En effet, pour que BC n'ait que le point D de commun avec la circonférence, il faut que tous les autres points de BC soient plus éloignés du centre A que le point D ; il faut donc que AD soit la plus courte distance du point A à la droite BC, c'est-à-dire que AD soit perpendiculaire à BC (l. I, p. 20, d. 16).

Supposons la droite BC perpendiculaire en D au rayon AD ; tout autre point E, pris sur cette droite, sera hors du cercle, puisque la droite AE, qui est une oblique, est plus longue que la perpendiculaire AD (l. I, p. 20, 1°). Donc, pour que BC n'ait qu'un point de commun avec la circonférence, il suffit que cette droite BC soit perpendiculaire à l'extrémité d'un rayon.

Les deux autres parties de l'énoncé sont évidentes.

Déf. 5. — Fig. 48. Une droite qui n'a qu'un point de commun avec une circonférence, se nomme une *tangente ;* le point commun est appelé *point de contact.*

Remarque. Puisque toute autre droite, menée par le point D, coupe la circonférence, il s'ensuit que par le point D on ne saurait mener une droite qui, aux environs de ce point, passe entre la circonférence et la tangente.

Déf. 6. — Fig. 48. Une droite qui rencontre la circonférence en deux points se nomme une *sécante ;* telle est FG.

PROPOSITION VII.

Théorème. — Fig. 49.

Deux parallèles interceptent sur la circonférence des arcs gaux.

Il y a trois cas : 1° Les deux parallèles sont des sécantes AB, CD. Du centre O menez OI perpendiculaire à AB, et par suite à sa parallèle CD. Mais ce rayon OI étant perpendiculaire à chacune des cordes NP, LM, le point I sera le milieu de chacun des arcs NIP, LIM (p. 3), de sorte que NI=IP, LI=IM, donc NI—LI=IP—IM, ou NL=PM.

2° L'une des parallèles est une sécante AB, l'autre une tangente EF. Menez le rayon OI au point de contact ; il sera perpendiculaire à la tangente EF (p. 6), et par conséquent aussi à sa parallèle AB; donc ce point I est le milieu de l'arc LIM (p. 3), et l'on a LI=IM.

3° Les deux parallèles sont des tangentes EF, GH; menez la sécante AB parallèle à ces droites. D'après ce qu'on vient de prouver, on a LI=IM, LK=MK; donc LI+LK =MI+MK, ou ILK=IMK, et chacun de ces arcs est une demi-circonférence.

PROPOSITION VIII.

Théorème. — Fig. 47.

Dans un même cercle ou dans des cercles égaux deux angles égaux BAC, EDF *qui ont leurs sommets au centre, interceptent des arcs égaux, et réciproquement.*

Les angles égaux BAC, EDF, pourront se superposer ; et comme les rayons sont aussi égaux, les points D, E, F tomberont en A, B, C. Donc arc BGC=EHF. Réciproquement, si arc BGC=EHF, les rayons étant égaux, les circonférences se superposeront ainsi que les arcs; donc les angles sont égaux.

Corollaire. Deux diamètres perpendiculaires divisent la circonférence en quatre arcs qui sont égaux, comme interceptés par des angles égaux.

Remarque 1. L'addition et la soustraction des angles peuvent se faire par le moyen de l'addition et de la soustraction des arcs. C'est ainsi que l'angle BAM, somme des angles BAC, CAM, intercepte l'arc BGCM, somme des arcs BGC, CM interceptés par ces angles partiels.

Remarque 2. Il est évident qu'au plus grand angle répond le plus grand arc, dans le même cercle ou dans des cercles *égaux*; et réciproquement.

DÉF. 7.—FIG. 50 et 51. On entend par angle *inscrit* tout angle tel que BCD, formé par deux cordes qui se coupent sur la circonférence.

DÉF. 8.—FIG. 52. L'angle *semi-inscrit* est celui (BDC) qui est formé par une corde et une tangente qui se coupent sur la circonférence.

DÉF. 9. On entend par *segment de cercle* l'espace compris entre un arc et sa corde.

PROPOSITION IX.

THÉORÈME.

L'angle inscrit, ou semi-inscrit, est égal à l'angle au centre qui intercepte la moitié de l'arc compris entre les côtés du premier.

FIG. 50. Soit d'abord l'angle inscrit BCE dont l'un des côtés CE est un diamètre. Menez le diamètre FG parallèle à BC; l'angle au centre FAE sera égal à BCE, à cause des parallèles BC, FG, coupées par CE (I. I, p. 8, 3°). Or, les angles CAG, FAE étant égaux, les arcs FE, CG le sont (p. 8). D'un autre côté, les arcs CG, BF sont aussi égaux (p. 7). Donc l'arc FE=BF, et l'arc FE, intercepté par l'angle au centre FAE, est la moitié de l'arc BFE, intercepté par l'angle inscrit BCE, égal à FAE.

Cela posé, s'il s'agit d'un angle inscrit tel que BCD, on tirera le diamètre CE; les angles BCE, ECD seront, d'après ce qui vient d'être prouvé, respectivement égaux aux angles au centre qui intercepteraient les moitiés des arcs BE, ED. Donc BCE+ECD sera égal à l'angle au centre qui intercepterait la moitié de BE+ED ou de BED.

FIG. 51. Si le diamètre CE passe hors de l'angle BCD, l'angle BCE sera égal à l'angle au centre qui comprend la moitié de l'arc BDE, et DCE à celui qui comprendrait la

moitié de DE ; donc l'angle BCD, c'est-à-dire BCE—DCE, sera égal à l'angle au centre qui intercepte la moitié de BDE—DE ou de BD.

Fig. 52. Enfin, soit l'angle semi-inscrit BDC. Menons le diamètre DE, qui sera perpendiculaire à la tangente (*p*. 6), et le diamètre FH parallèle à BD ; les arcs DF, FE, EH, HD seront égaux. L'angle droit EDC est égal à l'angle au centre EAF qui intercepte l'arc EF, moitié de l'arc EFD ; on vient d'ailleurs de prouver que l'angle BDE est égal à l'angle au centre qui intercepte la moitié de BE ; donc l'angle BDC est égal à l'angle au centre qui intercepte la moitié de l'arc BFD.

Corollaire 1. Fig. 53. *Les angles* B, B', etc., *inscrits dans le même segment* ABC, *sont égaux entre eux*, comme étant égaux à l'angle au centre qui intercepte la moitié de l'arc ADC. Il en est de même des angles inscrits dans des segments égaux.

Corollaire 2. Fig. 54. *Tout angle* BAC, *inscrit dans un demi-cercle, est droit.* Car il est égal à l'angle au centre qui intercepte la moitié d'une demi-circonférence ou un quart de circonférence, et cet angle au centre est droit.

Déf. 10. — Fig. 55. L'angle *excentrique* est celui qui est formé par deux cordes se coupant dans le cercle.

Déf. 11. — Fig. 56. L'angle *extérieur* est formé par deux sécantes qui se coupent hors du cercle, ou par une tangente et une sécante, ou par deux tangentes.

PROPOSITION X.

Théorème.

L'angle excentrique BAC (fig. 55) *est égal à l'angle au centre qui intercepte la demi-somme des arcs* BC, DE *de celui-là; l'angle extérieur* BAC (fig. 56) *est égal à l'angle au centre qui intercepte la demi-différence des arcs* BC, DE *du premier.*

1° Fig. 55. Tirez EC ; par rapport au Δ AEC, l'angle extérieur BAC est égal à E+C (l. I, p. 14, r. 3) ; mais les

angles inscrits E, C, valent des angles au centre dont les arcs seraient $\frac{1}{2}$ BC, $\frac{1}{2}$ ED (p. 9); donc BAC, leur somme, vaut la somme de ces angles au centre, ou celui dont l'arc serait $\frac{1}{2}$ BC+$\frac{1}{2}$ED.

2° Fig. 56. Tirez BD; l'angle BDC=A+B; donc A est la différence des angles inscrits BDC, EBD, et vaut l'angle au centre dont l'arc serait $\frac{1}{2}$ BC—$\frac{1}{2}$ ED.

Remarque. Si donc un angle est égal à l'angle au centre qui intercepte la moitié de l'arc intercepté par le premier, ce premier a son sommet sur la circonférence.

Déf. 12. — Fig. 57. Une figure rectiligne ABC est dite *inscrite* dans un cercle si elle a tous ses sommets sur la circonférence; le cercle est dit *circonscrit* à la figure.

Déf. 13.—Fig. 58. Une figure rectiligne ABCD est dite *circonscrite* à un cercle si tous ses côtés sont tangents à la circonférence; le cercle est dit inscrit à la figure.

Déf. 14. La *bissectrice* d'un angle est la droite qui divise cet angle en deux parties égales.

PROPOSITION XI.

Théorème. — Fig. 57.

A tout triangle ABC *on peut circonscrire un cercle.*

Menez DE perpendiculaire au milieu de AB, GF perpendiculaire au milieu de BC; ces droites DE, GF se couperont (l. I, p. 9) en un point G qui sera également distant des points A, B, vu qu'il est sur la perpendiculaire menée au milieu de AB (l. I, p. 21); de même il est à égales distances des points B, C. Donc le point G est également éloigné des points A, B, C, et si de G comme centre avec le rayon GA on décrit une circonférence de cercle, elle passera par les trois points A, B, C.

PROPOSITION XII.

Théorème. — Fig. 59.

A tout Δ ABC *on peut inscrire un cercle.*

Soient AO, BO, les bissectrices des ∧ BAC, ABC; de leur point d'intersection O menez sur les côtés du Δ les perpendiculaires OD, OE, OF : je dis qu'elles sont égales. Car dans les Δ BOD, BOE, à cause de BO, on a ∧ OBD=OBE; les ∧ en D, E, sont droits; le côté OB est commun; donc (l. 1, p. 16) ces Δ sont égaux et le côté DO=OE. On prouve de même que DO=OF. Donc si du point O comme centre avec le rayon OE on décrit une circonférence, elle passe en E, D, F; d'ailleurs les côtés BC, BA, AC, perpendiculaires aux extrémités E, D, F, des rayons OE, DO, FO, sont des tangentes (p. 6, d. 5). Donc le cercle est inscrit au Δ.

Remarque 1. Si l'on tire CO, les Δ COE, COF, ont le côté CO commun, le côté OE=OF, et l'angle droit en E égal à l'angle en F. Donc (l. 1) ils sont égaux, et CO est la bissectrice de l'angle ACB. Par suite les *bissectrices des angles d'un Δ se coupent en un point.*

Remarque 2. Tout point O de AO est également distant des côtés de l'angle CAB, dont AO est la bissectrice; réciproment, tout point I, pris dans cet angle, à égales distances des côtés, détermine avec ces distances IL, IM, et les ∧ en A, deux Δ égaux, et se trouve sur la bissectrice AO, qui est ainsi le lieu des points pris dans l'∧ à égales distances de ses côtés.

Remarque 3. Fig. 60. Si l'on prolonge indéfiniment les côtés d'un Δ ABC, on reconnaîtra, 1° que les droites AO′, BO′, CO′ bissectrices des ∧ HAE, FBD, ACB, concourent en un point O′ centre d'un cercle inscrit à la figure HABF. 2° Que la droite AO″, prolongement de AO′ et bissectrice de DAI, concourt avec BO″, CO″, bissectrices des ∧ ABC, ACG, en un point O″ centre d'un cercle inscrit à DACG. 3° Que CO‴, BO‴, prolongements de CO″, BO′ et bissectrices des ∧ ICB, EBG, concourent avec AO‴, bissectrice de BAC en un point O‴, centre d'un cercle inscrit à EBCI. 4° On pourra démontrer que les droites AO‴, BO″ CO′, sont perpendiculaires à O′O″, O′O‴, O″O‴, respectivement.

PROPOSITION XIII.

THÉORÈME. — FIG. 53.

Pour qu'un cercle puisse être circonscrit à un quadrilatère convexe, il faut que les angles opposés de ce polygone soient supplémentaires.

1° Soit ABCD un quadrilatère inscrit; l'angle au centre égal à B intercepte la moitié de l'arc ADC (p. 9); l'angle au centre égal à D intercepte la moitié de l'arc ABC; donc ces deux ∧ au centre interceptent ensemble la demi-circonférence et sont supplémentaires ainsi que les ∧ B, D. De même BAD, BCD sont supplémentaires.

Corollaire. Tout ▱ inscrit est un rectangle.

PROPOSITION XIV.

THÉORÈME. — FIG. 58.

Pour qu'un cercle puisse être inscrit dans un quadrilatère, il faut que la somme de deux côtés opposés soit égale à celle des deux autres.

1° Soit ABCD un quadrilatère circonscrit, E, F, G, H les points de contact; tirez OE, OH, OA. Les Δ AOH, AOE ont AO commun, OH=OE; les ∧ en H, E, sont droits, donc AE=AH; de même BE=BF, DG=DH, CG=CF; ajoutant, on a AE+BE+DG+GC=AH+BF+CF+DH, ou AB+DC=AD+BC.

Corollaire. Tout ▱ circonscrit à un cercle est un lozange.

Remarque. On voit que pour les polygones de plus de trois côtés, on ne peut plus affirmer qu'il soit possible d'y circonscrire ou d'y inscrire un cercle, au contraire du Δ.

DÉF. 15. Un polygone qui a tous ses angles égaux est dit *équiangle.*

DÉF. 16. Un polygone qui a tous ses côtés égaux est dit *équilatéral.*

DÉF. 17. Un polygone qui est à la fois équiangle et équilatéral est appelé polygone *régulier.*

Le Δ équilatéral et le carré sont des polygones réguliers.

Déf. 18. Une ligne brisée, qui a ses côtés égaux et ses angles tournés dans le même sens, aussi égaux, s'appelle *ligne brisée régulière*, *polygone régulier non fermé*.

PROPOSITION XV.

Théorème. — Fig. 61.

A tout polygone régulier ABCDE, *fermé ou non*, *on peut circonscrire un cercle ; on peut aussi lui inscrire un cercle.*

Par trois sommets consécutifs A, B, C, faites passer une circonférence ; je dis qu'elle passera aussi par le sommet D. Car soit O son centre, AO le rayon ; tirez OD, et menez OG perpendiculaire à la corde BC ; le point G sera le milieu de cette droite (p. 3, c. 2°). Ainsi, les deux quadrilatères OABG, ODCG ont le côté OG commun, le côté BG=CG, les côtés AB, CD égaux puisque la figure donnée est régulière, l'$\wedge$ B=C par la même raison, et les $\wedge$ en G égaux comme droits. donc (l. I, p. 29) ces figures sont égales, et OD=OA; Par suite, le cercle décrit du centre O et du rayon OA passe par D; on démontre de même qu'il passe par E, F. Donc il est circonscrit.

Par rapport à ce cercle, les côtés AB, BC, CD, sont des cordes égales; donc elles sont également éloignées du centre O (p. 4), c'est-à-dire que les perpendiculaires OH, OG, OI, menées du centre sur ces côtés, sont égales, et si de O comme centre avec le rayon OH on décrit une circonférence, elle passera par les milieux H, G, I de tous ces côtés et y sera tangente (p. 6). Donc ce cercle sera inscrit.

Déf. 19. Le rayon AO du cercle circonscrit à un polygone est appelé le *rayon* du polygone ; le rayon OH du cercle inscrit est appelé l'*apothème* du polygone. Le centre commun O des deux cercles est appelé *centre* du polygone.

Déf. 20. Dans un polygone régulier l'angle AOB formé par deux rayons AO, BO menés aux extrémités d'un côté AB, se nomme *angle au centre ;* dans un même polygone régu-

lier, les angles au centre sont égaux, comme interceptant des arcs égaux.

PROPOSITION XVI.

Théorème. — Fig. 62.

Un polygone inscrit ABCDE *est régulier s'il est équilatéral; un polygone circonscrit* A'B'C'D'E' *est régulier s'il est équiangle.*

1° Si les cordes AB, BC, etc., sont égales, les arcs AB, BC, sont égaux (p. 4); de plus, les segments ACB, BDC seront égaux; donc les angles ABC, BCD inscrits dans ces segments sont égaux (p. 9, c. 1). Même raisonnement pour les autres angles. Donc le polygone ABCDE est régulier.

2° Supposons les angles A', B', C', égaux entre eux. Joignez les points de contact par les cordes AB, BC, CD. Les angles semi-inscrits A'AB, A'BA sont égaux comme interceptant le même arc : ainsi le triangle AA'B est isocèle (l. I). De même les triangles BB'C, etc., sont isocèles, et comme A'=B', les angles B'BC, A'BA seront aussi égaux (l. I, p. 14), et intercepteront des arcs AB, BC égaux. De là il suit que les cordes AB, BC sont égales; par conséquent les triangles AA'B, BB'C sont égaux, et AA'=A'B=BB'=B'C=CC'=C'D=DD'. Donc A'B'=B'C'=etc., et le polygone circonscrit, outre qu'il est équiangle, est équilatéral. Ainsi il est régulier.

Remarque 1. Ces démonstrations n'exigent pas que les polygones soient fermés; seulement, dans le cas du polygone circonscrit, il faut prendre les demi-côtés extrêmes égaux aux autres demi-côtés AA', A'B.

Remarque 2. Le polygone circonscrit est régulier si les arcs AB, BC, interceptés par les angles A'B', sont égaux.

Remarque 3. Pour inscrire ou circonscrire à une circonférence un polygone régulier, il suffit de savoir diviser la circonférence en autant de parties égales que le polygone a de côtés.

PROPOSITION XVII.

THÉORÈME. — FIG. 63.

Deux circonférences de cercles ne sauraient avoir plus de deux points communs sans se confondre.

Soit une circonférence ayant son centre en A, et soient pris sur cette circonférence trois points quelconques B, C, D; je dis que toute circonférence qui passera par ces trois points se confondra avec la circonférence donnée. En effet, tirons les cordes BC, CD; aux points E, F, milieux de ces cordes, élevons des perpendiculaires EA, FA qui passeront au centre A (p. 3). Toute circonférence qui passera par les deux points B, C, devra avoir son centre également distant de ces deux points (déf. 1); donc il se trouvera sur la droite AE (l. 1, p. 21); par la même raison, toute circonférence qui passera par les deux points C, D, aura son centre sur AF; donc, si une seconde circonférence passe par les trois points B, C, D, elle aura son centre à la fois sur EA et sur FA, c'est-à-dire au point A, et comme cette seconde circonférence passe au point B, elle a pour rayon AB et se confond avec la circonférence donnée.

Remarque. Ainsi, deux circonférences ont ou deux points communs, ou un seul point commun, ou bien elles n'ont aucun point commun. Dans chacun de ces deux derniers cas, les circonférences peuvent être extérieures l'une à l'autre, ou l'une peut être dans l'autre, ce qui donne cinq cas au plus.

PROPOSITION XVIII.

THÉORÈME. — FIG. 64.

Si deux circonférences se coupent en deux points, C, C', *ces points sont symétriques par rapport à la ligne des centres* AB *et hors de cette ligne; si deux circonférences n'ont qu'un point commun, il est sur la ligne des centres.*

1° Car si au milieu de la corde commune CC' on mène

une perpendiculaire, elle doit passer par chacun des centres (p. 3, r. 3°); donc cette perpendiculaire se confond avec la droite AB, donc AB est perpendiculaire au milieu de CC', les points C,C' sont hors de AB, et sont symétriques par rapport à AB.

2° Si deux cercles n'ont qu'un point commun, ce point est sur la ligne des centres. Car s'il était d'un côté de cette ligne, comme cette même ligne divise la figure en deux parties superposables, il s'ensuit qu'il y aurait encore un point commun de l'autre côté de cette ligne; il y aurait donc deux points communs, tandis qu'on n'en suppose qu'un seul.

DÉF. 22. Deux cercles sont dits *tangents* lorsqu'ils n'ont qu'un point de commun : ce point commun s'appelle *point de contact*.

PROPOSITION XIX.

THÉORÈME. — FIG. 64.

Si deux cercles se coupent en deux points, la distance des centres est moindre que la somme des rayons, et plus grande que leur différence.

1° Si deux cercles se coupent en deux points, aucun de ces points n'est sur la ligne des centres (p. 18). Donc chacun de ces points détermine avec les centres A et B un triangle comme ACB, dans lequel chaque côté est plus petit que la somme des deux autres. Ainsi $AB < AC+BC$, et $BC < AB+AC$; ou retranchant AC de part et d'autre, $BC-AC < AB$ ou $AB > BC-AC$.

PROPOSITION XX.

THÉORÈME.

Si deux cercles sont tangents, la distance des centres est égale à la somme ou à la différence des rayons.

1° Si deux cercles se touchent extérieurement (fig. 65), je dis que la distance des centres est égale à la somme des rayons. Car le point commun est nécessairement sur la ligne des centres (p. 18) entre les deux centres A, B, de sorte que AB=AC+BC.

2° Fig. 66. Si les deux cercles se touchent intérieurement, le point commun sera encore sur la ligne des centres, et du même côté par rapport aux deux centres, de sorte que AB=AC—BC.

PROPOSITION XXI.

Théorème.

Si deux cercles n'ont aucun point commun, la distance des centres est plus grande que la somme des rayons, ou plus petite que leur différence.

1° Les cercles étant extérieurs l'un à l'autre (fig. 67), il s'ensuit que tous les points de circonférence B sont hors du cercle A. Le point D, où la ligne des centres AB coupe la circonférence B, est donc aussi hors du cercle A. Ainsi, AD>AC; d'où AD+DB ou AB>AC+DB, et la distance des centres est > la somme des rayons.

2° Fig. 68. Le cercle B est dans le cercle A; par suite les points de circonférence B sont plus près de A que ceux de circonférence A. Soit donc menée et prolongée la ligne des centres AB; le point C où elle coupe pour la seconde fois la circonférence B est plus près de A, que le point D de circonférence A. Donc AC<AD, et AC—BC ou AB<AD—BC; c'est-à-dire que la distance des centres est < la différence des rayons.

Remarque sur les prop. 19, 20, 21.

Soit nommée D la distance des centres, R le plus grand des rayons (s'ils ne sont pas égaux), r l'autre.

Si les cercles sont :	On a :
1° Sécants.	$D < R + r$, et $D > R - r$.
2° Tangents extérieurement. .	$D = R + r$.
3° Tangents intérieurement. .	$D = R - r$.
4° Extérieurs . . . } sans point	$D > R + r$.
5° L'un dans l'autre } commun.	$D < R - r$.

De là, il suit qu'à chaque cas de la seconde colonne, répondra le cas de la première qui occupe la même ligne, ce qui donne les réciproques des propositions 19, 20, 21.

Donc 1° *si* $D < R + r$ et $D > R - r$, *les cercles sont sécants.*

Car s'ils étaient tangents, D serait ou $= R + r$, ou $= R - r$, ce qui n'est pas ; s'ils n'avaient aucun point commun D serait $> R + r$, ou $< R - r$.

2° Si $D = R + r$, *les cercles sont tangents extérieurement*, sans quoi D serait (1°) $< R + r$, ou (3°) $= R - r$, etc.

3° Si $D = R - r$, *les cercles sont tangents intérieurement.*

4° Si $D > R + r$, *les cercles n'auront pas de point commun, l'un étant hors de l'autre;*

5° Si $D < R - r$, *rien de commun, et l'un dans l'autre.*

Problème 1. — Fig. 69.

Sur le milieu d'une droite AB *élever une perpendiculaire.*

Du point A comme centre, avec un rayon AC plus grand que la moitié de AB, décrivez une circonférence ECD ; du point B comme centre, avec le même rayon, décrivez une seconde circonférence EFD. Ces deux circonférences se couperont en deux points ; car chaque rayon étant plus grand que la moitié de AB, la somme des rayons sera plus grande que la distance des centres AB ; d'ailleurs, les deux rayons étant égaux, leur différence, qui est nulle, est moindre que la même distance AB. Donc (r. sur p. 19, 20, 21) les cercles se couperont en deux points E, D ; mais à cause des rayons égaux, chacun de ces points est également distant des points A et B ; donc E et D appartiennent à la perpendiculaire éle-

vée au milieu de AB (l. I, p. 21). Donc enfin ED est cette perpendiculaire.

Remarque. Le point G est donc le milieu de AB, et cette construction sert à diviser une droite en deux parties égales; si l'on divise ensuite chaque moitié en deux parties égales, et ainsi de suite, on pourra diviser la droite en 4, 8, 16, etc., parties égales.

PROBLÈME 2. — FIG. 70.

Par trois points donnés, non en ligne droite, faire passer une circonférence de cercle. (Voyez p. 11.)

Remarque. La même construction sert à trouver le centre d'un cercle ou d'un arc donné. Dans ce cas, on prend sur cet arc ou sur la circonférence trois points à volonté A, B, C; on les joint par des cordes AB, BC, sur les milieux desquelles on élève les perpendiculaires EF, HD, qui passeront toutes les deux au centre (p. 3, r.), et détermineront ce point par leur intersection O.

PROBLÈME 3. — FIG. 71.

Par un point C *pris sur une droite* AB, *élever une perpendiculaire à cette droite.*

Prenez sur la droite AB les deux distances égales CE, CD; des points E, D comme centres, avec un même rayon, plus grand que DC, décrivez deux arcs qui se coupent en un point F; ce point F sera également distant de D et E; il en est de même du point C; donc CF sera perpendiculaire à DE (l. I. p. 21).

PROBLÈME 4. — FIG. 72.

D'un point A *donné hors d'une droite* DE *mener une perpendiculaire à cette droite.*

Du point A comme centre et d'un rayon suffisamment grand décrivez un arc qui coupe la droite DE en deux points B

et C; de ces deux points comme centres, avec un même rayon, plus grand que la moitié de BC, décrivez deux arcs qui se coupent en un point F; les deux points A et F étant également distants de C et B, la droite AF sera perpendiculaire à BC ou DE.

Problème 5. — Fig. 73.

En un point A *d'une droite* AB, *faire un* ∧ *égal à un* ∧ *donné* C.

Du point C comme centre et d'un rayon arbitraire CD, décrivez l'arc DFE terminé aux côtés de C; tirez la corde DE. De A comme centre, avec le rayon AG=CD, décrivez un arc indéfini GIH, et de G comme centre, avec un rayon égal à la corde DE, décrivez un second arc qui coupe GIH en un point H; tirez HA, et A sera l'angle demandé. Car les rayons étant égaux, ainsi que les cordes, les arcs DFE, GIH le sont (p. 4); donc les ∧ A et C le sont (p. 8).

Problème 6. — Fig. 8.

D'un point G *mener une parallèle à une droite* CD.

Du point G tracez une transversale arbitraire GH, et faites au point G l'angle EGB, ou l'angle AGH, égal à GHD ou à CHF, et la droite GB ou BA sera parallèle à CD (l. I, p. 5). On peut aussi faire l'un des ∧ AGE, BGF égal à l'un des ∧ FHD, CHE.

Problème 7. — Fig. 74.

Construire un Δ *connaissant deux côtés* A, B, *et l'angle compris* C.

Tirez une droite indéfinie DE, et faites au point D un angle égal à l'angle C; prenez DE=A, DF=B, tirez FE, et DFE sera le Δ demandé.

Problème 8. — Fig. 74.

Construire un Δ connaissant un côté A *et deux* ∧ C, G.

Premier cas. Les deux ∧ C, G doivent être adjacents au côté donné : prenez une droite DE égale à A ; au point D faites l'angle D égal à C, au point E l'angle E égal à G ; les côtés DF, EF se couperont si la somme C+G est plus petite que deux droits, et DFE sera le Δ demandé.

Deuxième cas. L'angle C doit être adjacent au côté A, et l'angle G opposé : sur une droite HM égale à A faites l'angle H égal à C ; en un point quelconque L de la droite HL faites l'angle HLK égal à G ; l'angle HKL sera le troisième angle du triangle (l. 1) ; on fera donc en M l'angle HMN égal à HKL, et HNM sera le Δ demandé.

Problème 9. — Fig. 75.

Construire un Δ connaissant les trois côtés A, B, C.

Pour que le Δ soit possible, il faut que le plus grand des trois côtés soit moindre que la somme des deux autres ; car dans tout Δ cette propriété a lieu. Si cette condition est remplie, le triangle peut se construire. En effet, prenez une droite DE égale au plus grand des trois côtés, c'est-à-dire à A ; du point D comme centre, avec un rayon égal à B, décrivez un cercle ; du point E comme centre, avec un rayon égal à C, décrivez un second cercle. Ces deux cercles se couperont ; car la distance des centres DE est supposée plus petite que la somme B+C des rayons ; de plus, puisque DE est plus grand que chacun des rayons, il est aussi plus grand que leur différence. Donc les cercles se couperont (p. 21, r.) en deux points ; soit F l'un de ces points ; DEF sera le Δ demandé.

Le Δ serait encore possible si A était égal au plus grand des deux autres côtés B, C, ou si les trois côtés étaient égaux.

Problème 10. — Fig. 76.

Construire un Δ *connaissant deux côtés* A, B, *et l'angle* C *opposé à l'un d'eux.*

Il y a deux cas : 1° l'angle donné C est opposé au côté A, qui est le plus grand des deux côtés donnés. Faites un ∧ FDE égal à l'angle donné C ; sur l'un des côtés prenez DE égal au côté B, et du point E comme centre, avec le rayon A, décrivez un cercle. Puisque ED ou B est moindre que le rayon A, la droite DF aura le point D dans ce cercle et le coupera en deux points F, G situés de différents côtés du point D. Si donc on tire EF, EG, on aura les deux Δ EDG, EDF, dont le dernier seul satisfait à la question. Car ∧ EDF est l'angle donné, et les côtés DE, EF sont égaux aux côtés donnés B, A. Le Δ GED renferme le côté DE égal à B, et le côté GE égal à A ; mais l'angle GDE, opposé à ce côté, est le supplément de C. Cependant si l'angle C était droit, le Δ GDE serait égal à EDF.

2° L'angle donné C doit être opposé au plus petit des deux côtés donnés, c'est-à-dire à B. Après avoir fait l'angle K égal à C, on prend KI égal à A, et du point I comme centre, avec un rayon égal à B, on décrit un cercle ; or, abaissons de I la perpendiculaire IM sur KM. Si B est plus grand que IM, le point M sera dans le cercle, la droite KM sera une sécante qui coupera ce cercle en deux points, et comme KI ou A est plus grand que le rayon B, ces deux points L, P seront situés du même côté du point K. Tirant donc IL et IP, on aura deux Δ KIL, KIP, satisfaisant tous les deux à la question. Car dans le premier, KI=A, IL=B et l'angle K, opposé à IL, est égal à C ; dans le second, KI =A, IP=B, et l'angle K, opposé à IP, est égal à C.

Si le côté B était égal à IM, l'arc de cercle décrit du centre I et du rayon B toucherait la droite KP en M, et le Δ KMI seul résoudrait la question. Enfin, si B était plus petit que IM, l'arc de cercle ne rencontrerait pas KP, et le Δ serait impossible.

PROBLÈME 11. — FIG. 77.

Diviser un angle ou un arc en 2, 4, 8, 16, etc., parties égales.

S'il s'agit d'un angle BAC, on décrit du sommet A comme centre, avec un rayon quelconque AB, un arc BIC terminé aux côtés de l'angle. Ensuite des points B et C comme centres, avec un même rayon plus grand que la moitié de la corde BC, on décrit deux arcs qui se coupent en un point F ; la droite AF divisera l'angle BAC en deux parties égales. Car cette droite AF, ayant deux points A, F également distants de B et C, se trouve perpendiculaire au milieu de BC (l. 1) ; donc elle passe au milieu de l'arc BIC (p. 3) ; mais si les arcs BI, IC sont égaux, les angles BAI, IAC le sont aussi (p. 8).

En second lieu, s'il s'agit d'un arc BC à diviser en deux parties égales, on détermine le point F comme tout à l'heure, on tire AF et l'on a le point I, milieu de l'arc.

Enfin, si l'on divise chaque moitié de l'angle ou de l'arc en deux parties égales, et ainsi de suite, on pourra opérer la division en 4, 8, 16, etc., parties égales.

Corollaire. Pour diviser la circonférence entière en quatre parties égales, il suffit de mener deux diamètres perpendiculaires. On saura donc diviser la circonférence en 4, 8, 16,... 2^n parties égales ; ainsi on saura inscrire et circonscrire les polygones réguliers de 4, 8, 16, 32,.., 2^n côtés (p. 16, r. 3), avec le secours du problème suivant.

PROBLÈME 12.

D'un point donné mener une tangente à un cercle donné.

1° FIG. 48. Le point donné est sur la circonférence en D : on tire le rayon DA, et au point D on lui mène la perpendiculaire BC, qui sera la tangente demandée (p. 6).

2° FIG. 78. Le point donné A est hors du cercle donné DCE. Du point B, centre de DCE, avec un rayon double du

rayon BD, décrivez un cercle FHG; du point A décrivez un second cercle qui passe par le centre B, et qui coupera le précédent en deux points F et G; joignez ces points au centre B par les droites BF, BG, qui couperont le cercle donné en deux points D, E : les droites AD, AE seront les tangentes demandées. Car BF, rayon du cercle FHG, et corde du cercle FBG, étant double de BD, le point D sera le milieu de cette corde, et la droite AD, menée par le centre A du cercle FBG et par ce milieu, sera perpendiculaire à la corde (p. 3), ou, en d'autres termes, AD est perpendiculaire à l'extrémité D du rayon BD; donc AD est tangent au cercle DCE.

Autrement. Fig. 78 *bis*. Soit A le point donné, DCE le cercle : joignez le point A au centre B de ce cercle, et sur AB, comme diamètre, décrivez une circonférence qui coupera la circonférence donnée en deux points D, E ; tirez les droites AD, AE, qui seront toutes les deux des tangentes. Car si l'on mène le rayon BD, l'angle BDA, inscrit dans le demi-cercle BDA, sera droit (p. 9, c. 2); donc AD, perpendiculaire à l'extrémité du rayon BD, est une tangente (p. 6). Même raisonnement pour AE.

Remarque. Dans le courant de la démonstration de prop. 14 on a prouvé (fig. 58) que les tangentes AH, AE, menées d'un point A, sont égales.

Problème 13. — Fig. 79.

Sur une droite donnée AB, *décrire un segment* capable *d'un* $\wedge$ *donné* C, c'est-à-dire *un segment tel que tout* $\wedge$ *qui y sera inscrit soit égal à cet* $\wedge$ *donné.*

Au point A de la droite AB faites l'angle BAD égal à l'angle donné C; en ce même point A élevez sur AD la perpendiculaire AO, et au point E, milieu de AB, tirez la droite EO perpendiculaire à AB; ces deux droites AO, EO se couperont en un point O, et si de ce point O comme centre, avec le rayon AO, on décrit un cercle, BAF sera le segment cherché. En effet, puisque EO est perpendiculaire au milieu de AB, le point O est également distant de A et de B; ainsi

le cercle décrit du centre O et du rayon AO passera en B. De plus, tout $\wedge$ inscrit dans le segment BFA est égal à l'angle au centre BOE qui intercepte la moitié de l'arc BIA (p. 9); mais AD, perpendiculaire au rayon AO, est une tangente; donc l'angle semi-inscrit BAD est aussi égal à ce même $\wedge$ au centre; donc tout $\wedge$ inscrit dans ce segment est égal à l'angle BAD, qui lui-même est égal à l'angle donné C. Par suite le segment BFA est capable de l'angle donné.

Remarque. Si les $\wedge$ BFA, BGA, BAD sont tous égaux, la circonférence que l'on fera passer par les trois points A, B, F passera aussi par G et sera tangente à AD en A, sans quoi l'angle G, ou l'angle BAD, serait plus grand ou plus petit que BOE (p. 10). Donc *le lieu des sommets de tous les* Δ BFA, BGA *qui ont un côté commun* AB, *et l'angle opposé égal, est une circonférence tangente à* AD *en* A, *et passant en* B. Bien entendu que ces Δ sont supposés placés du même côté de AB.

LIVRE III.

LES FIGURES PLANES :

GRANDEUR RELATIVE DE LEURS ÉLÉMENTS

Expression des grandeurs géométriques en nombres ou mesure.
Mesure des longueurs et des angles, pr. 1—3.
Division des droites en segments, pr. 4—7.
Comparaison des figures dans leurs éléments, *ou* similitude, pr. 8—23.
Relations métriques déduites de cette comparaison, pr. 24—28.
Division de la circonférence, pr. 29—32.
Rectification approchée de la circonférence, pr. 33—35.
Transversales, propriétés harmoniques, etc. Germe de la transformation des figures.

Dans quelques propositions du livre III, on se fondera sur les premiers principes de la théorie des infiniment petits, exposée dans notre Arithmétique (2e édit., 1843).

DÉF. 1. On entend par *commune mesure* de deux grandeurs de même espèce, une troisième grandeur de même espèce qui est contenue un nombre entier de fois dans chacune des deux premières, ce qu'on exprime encore en disant que la commune mesure les divise toutes les deux.

Si une grandeur M est une commune mesure de deux

grandeurs A et B, il est clair que toute partie aliquote de M est aussi une commune mesure de A et B.

Parmi toutes les communes mesures de deux grandeurs il y en a nécessairement une qui est plus grande que les autres.

Déf. 2. Deux grandeurs sont dites *commensurables* entre elles, si elles ont une commune mesure; dans le cas contraire, elles sont dites *incommensurables* entre elles. (*Comparez Arithm.*)

PROPOSITION I.

Problème — Fig. 80.

Trouver, s'il est possible, la plus grande commune mesure de deux segments de droite AB, CD, *donnés de longueur, ou de deux angles, ou de deux arcs de même rayon.*

Si l'on porte la plus petite droite CD sur la plus grande AB autant de fois que faire se peut, il arrivera de deux choses l'une : ou elle y est contenue un nombre entier de fois, ou bien il y aura un reste moindre que CD. Dans le premier cas, CD serait la plus grande commune mesure, et l'opération se trouverait terminée. Supposons donc que le second cas soit celui qui se présente; admettons que CD soit contenu deux fois dans AB, et qu'il y ait un reste B'B, moindre que CD, on aura

$$AB = 2 \times CD + BB',$$

et je dis que la plus grande commune mesure de AB et de CD sera la même que celle de CD et de BB'.

En effet, toute commune mesure de AB et de CD, divisant exactement ces deux lignes, divisera la somme AB et l'une de ses parties $2 \times CD$; elle divisera donc aussi l'autre BB'. Mais divisant CD et BB', elle est une commune mesure à ces deux lignes. D'un autre côté, toute commune mesure de CD et BB', divisant CD, divisera aussi $2 \times CD$; donc elle divise les deux parties $2 \times CD$ et BB'; par suite elle divisera leur somme AB. Ainsi, toute commune me-

sure de CD et BB′ divise AB et CD, et réciproquement. Donc la plus grande commune mesure de AB, CD, est la même que celle de CD et BB′.

Maintenant portons BB′ sur CD, et si BB′ est contenu exactement dans CD, BB′ sera la plus grande commune mesure. Sinon, il y aura un reste que l'on portera sur BB′, et l'on continuera ainsi à comparer chaque reste avec le précédent, comme dans la recherche du plus grand commun diviseur de deux nombres. Deux cas sont possibles : ou bien on finira par trouver un reste qui sera contenu un nombre entier de fois dans le précédent, alors ce dernier reste sera la plus grande commune mesure ; ou bien l'on n'arrivera jamais à un reste qui soit contenu exactement et *sans reste* dans le précédent : dès lors les deux longueurs données n'ont pas de commune mesure et sont incommensurables entre elles.

Lorsqu'on a deux arcs de même rayon, on peut porter le plus petit sur le plus grand au moyen de la corde du premier. On peut donc chercher la commune mesure de deux arcs de même rayon.

Enfin, comme on sait aussi faire un angle égal à un angle donné (I. 2), et par conséquent porter un angle dans un autre, on saura de même chercher la commune mesure de deux angles.

PROPOSITION II.

Théorème.

Si deux segments de droite A, B, *ou deux angles, ou deux arcs de même rayon, sont commensurables entre eux, il existe un nombre abstrait commensurable tel, que* B *multiplié par ce nombre reproduit* A, *et réciproquement.*

En effet, supposons que la commune mesure des deux droites soit contenue 11 fois dans A, et 5 fois dans B. Cette commune mesure sera le cinquième de B, et ce cinquième

pris 11 fois reproduira A. Donc les $\frac{11}{5}$ de B font une longueur égale à A, c'est-à-dire que $B \times \frac{11}{5}$ est égal à A.

Réciproquement, si le produit de B, par un nombre commensurable tel que $\frac{11}{5}$, est égal à A, c'est que A contient exactement 11 fois le cinquième de B; donc le cinquième de B, c'est-à-dire une longueur contenue 5 fois dans B, est aussi contenue 11 fois dans A, et peut servir de commune mesure à A et à B.

De même pour les angles ou les arcs pris dans le même cercle ou dans les cercles égaux.

Déf. 3. Le nombre abstrait par lequel il faut multiplier une droite B, pour en reproduire une autre A, s'appelle le *rapport* de A à B. Si le rapport de A à B est $\frac{11}{5}$, on exprime cela en écrivant

$$\frac{A}{B} = \frac{11}{5}$$

ou encore $A : B :: 1 : 15.$

Ce rapport, d'après la définition même, est le quotient de la division de A par B.

D'après les explications données en arithmétique sur les nombres incommensurables, on conçoit aussi le produit d'une longueur, d'un angle, par un nombre incommensurable, de sorte que rien n'empêche d'étendre la définition 3 à deux longueurs quelconques, à deux angles quelconques, et la prop. 1 peut servir à déterminer soit exactement, soit par approximation le rapport de deux pareilles grandeurs.

Du reste, pour calculer ce rapport par approximation, on peut diviser B en 2, 4, 8, etc., parties égales. Supposons B divisé en 64 parties égales; si une de ces divisions est contenue dans A, 151 fois, avec un reste moindre que cette

division, le rapport A : B sera compris entre $\frac{151}{64}$ et $\frac{152}{64}$.

On l'aura donc à $\frac{1}{64}$ près. On peut de même le calculer à $\frac{1}{128}$, à $\frac{1}{256}$ près, etc.

DÉF. 4. La *mesure* d'une grandeur est le rapport de cette grandeur à une autre (de même espèce) nommée, relativement à la première, *unité*.

Au moyen de ce qui précède, on saura *mesurer :*

1° Une droite quelconque, en prenant pour unité une droite;

2° Un arc de cercle, en prenant pour unité un autre arc de même rayon;

3° Un angle, en prenant pour unité un autre angle.

La troisième opération peut être ramenée à la seconde, qui a l'avantage de s'effectuer plus simplement. Cette transformation est démontrée dans la proposition suivante.

PROPOSITION III.

THÉORÈME. — FIG. 81.

Deux angles BAC, EDF *sont dans le même rapport que les arcs* BC, EF, *interceptés entre leurs côtés, et décrits de leurs sommets comme centres avec des rayons égaux.*

Supposons que les arcs BC, EF aient une commune mesure, contenue, par exemple, 5 fois dans BC, et 3 fois dans EF; portons-la sur ces arcs, et soient *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f* les points de division. En joignant ces points aux centres respectifs, on obtient des angles BA*a*, etc., tous égaux comme interceptant des arcs égaux dans des cercles égaux (l. 2, p. 8). L'angle BAC en contient 5, tandis que EDF en renferme 3; donc le rapport de ces deux angles est égal à $\frac{5}{3}$;

mais celui des arcs BC, EF est aussi $\frac{5}{3}$. Ces deux rapports sont donc égaux et donnent la proportion BAC : EDF : : BC : EF.

Fig. 82. Si BC n'est pas commensurable avec EF, divisez EF en parties égales que nous supposerons *infiniment petites* par rapport à EF. Il est manifeste en effet que nous pouvons, tout en laissant EF tel qu'il est, le concevoir partagé en 2, 4, 8, 16, 32, etc., parties égales, en plus de 1000, plus de 10,000, etc., si nous voulons. On voit que de cette manière la grandeur des parties n'est point fixée, que nous pouvons, dans le raisonnement, en disposer, tandis que la grandeur de EF reste la même dans toute la démonstration, de sorte que EF est bien ici *fini absolu*. Il en est de même de BC et des angles EDF, BAC. Quel que soit le nombre des divisions de EF, on peut en porter une sur BC, jusqu'à ce qu'il y ait un reste moindre que ces divisions : soit CC′ ce reste, qui sera aussi infiniment petit, puisque en augmentant le nombre des divisions de EF, nous pouvons le rendre moindre que telle longueur qu'on assignera. De même l'angle C′AC. Quant à l'angle BAC′, il est, ainsi que l'arc BC′, *simplement fini*, c'est-à-dire que plus nous supposerons petites les divisions de EF, et moins BAC′, BC′ différeront de BAC, BC, respectivement.

Cela posé, l'arc BC′ se composant de sous-divisions de EF, ces arcs sont commensurables entre eux, et l'on a

$$BAC' : EDF : : BC' : EF.$$

Supprimant les infiniment petits, c'est-à-dire remplaçant BAC′, BC′ par les finies absolues correspondantes, on a BAC : EDF : : BC : EF.

Quant au passage de l'une de ces proportions à l'autre, pour expliquer sur ce cas particulier nos principes généraux, remarquons que BAC′ pouvant différer de BAC d'aussi peu qu'on voudra, il en sera de même de $\frac{BAC'}{EDF}$,

par rapport à $\frac{BAC}{EDF}$: par exemple, si on divise EF en plus de 10,000 parties égales, BC′ et BC différant entre eux de moins que $\frac{1}{10000}$ EF, il s'ensuit que $\frac{BC'}{EF}$ et $\frac{BC}{EF}$ différeront entre eux de moins que $\frac{1}{10000}$, ainsi que $\frac{BAC'}{EDF}$, $\frac{BAC}{EDF}$; les différences entre $\frac{BC}{EF}$, $\frac{BAC}{EDF}$ et les deux rapports égaux $\frac{BC'}{EF}$, $\frac{BAC'}{EDF}$ sont donc moindres que $\frac{1}{10,000}$; il en est donc de même de la différence entre $\frac{BC}{EF}$, $\frac{BAC}{EDF}$. De là il suit qu'il y a absurdité à supposer ces derniers rapports inégaux : car si on suppose que leur différence est $\frac{1}{1000}$, nous venons de prouver que cela n'est pas. Supposez que leur différence est $\frac{1}{10^6}$; nous prouverons de même que cela est faux; il n'y a même pour cela rien à changer dans le raisonnement, si ce n'est le nombre 10,000 en 10^6 et ainsi de suite.

Nous avons ici répété à peu près explicitement la démonstration de nos principes sur les infiniment petits.

Ces principes bien conçus, les démonstrations des questions analogues à celle du théorème 3 deviennent excessivement simples. On peut même réduire le second cas en principe général, comme nous le ferons plus bas.

Remarque 1. Rien n'empêche de supposer que l'un des arcs est une circonférence entière, et que l'angle correspondant est, par conséquent, égal à quatre angles droits.

Remarque 2. La propriété démontrée dans cette proposition s'exprime aussi par l'énoncé suivant : ***L'angle a même mesure que l'arc compris entre ses côtés, et décrit de son***

sommet comme centre avec un rayon arbitraire. On sous-entend ici que l'unité d'angle intercepte l'unité d'arc.

L'angle droit intercepte le quart de la circonférence décrite de son sommet comme centre. Si donc on veut rapporter les angles à l'angle droit comme unité, il suffira de rapporter les arcs au quart de circonférence.

Dans un grand nombre d'applications, on prend pour unité $\frac{1}{360}$ de la circonférence que l'on appelle *degré*, de sorte que la circonférence est supposée partagée en 360 parties égales; on subdivise le degré en 60 parties égales nommées *minutes*, la minute en 60 parties égales nommées *secondes*, etc. Cette division est appelée *division sexagésimale.* L'angle droit a donc dans ce cas pour mesure un arc de 90 degrés. Les degrés, minutes, secondes s'indiquent par les signes °, ′, ″.

Remarque 3. Puisque, d'après la prop. 9, l. 2, l'angle inscrit est égal à l'angle au centre qui intercepte la moitié du même arc, on peut dire que *l'angle inscrit a pour mesure la moitié de celle de l'arc compris entre ses côtés.* Il en est de même de l'angle semi-inscrit.

Pour l'angle excentrique et l'angle extérieur, voyez l. 2, p. 10.

Remarque 4. La démonstration du second cas de la prop. actuelle peut, avons-nous dit, être formulée en principe général, et ce de la manière suivante :

Soient deux grandeurs A, B, *de même espèce;* a, b *deux longueurs tellement liées avec* A, B, *respectivement, que si* a *ou* b *varie d'une manière continue (c'est-à-dire par degrés infiniment petits), il en soit de même de* A *ou* B; *soient enfin* α, β *deux quantités qui ne changent pas lorsque* a *ou* b *varie;*

Si, dans le cas où a *et* b *seraient commensurables entre eux, on avait la proportion*

$$A : B :: a\alpha : b\beta$$

je dis que cette proportion aura lieu si a *et* b *n'ont pas de commune mesure.*

Divisez b en parties égales infiniment petites, portez une des parties sur a autant de fois que possible, de façon que le reste soit moindre qu'une des divisions. Nommons a' la partie de a, formée par ces divisions de b (comme BC' à prop. 3 est formée de divisions de EF); a' sera commensurable avec b. Soit A' la partie de A qui dépend de a' comme A de a (c'est ainsi que, prop. 3, l'angle BAC' répond à BC'). Puisque a' et a diffèrent infiniment peu, il en sera de même de A', A, d'après l'énoncé. Or, par hypothèse on a

$$A' : B :: a'\alpha : b\beta.$$

Supprimant les infiniment petits, il vient

$$A : B :: a\alpha : b\beta.$$

PROPOSITION IV.

THÉORÈME. — FIG. 83.

Des parallèles IE, KF, LG... *qui déterminent des segments égaux* AI, IK... *sur une transversale* AB, *détermineront aussi des segments égaux* AE, EF, etc., *sur toute autre transversale* AC.

Du point I menez la droite IO parallèle à EF jusqu'à la rencontre de KF en O; dans les deux Δ AIE, KIO, on aura les ∧ IAE, KIO égaux comme correspondants par rapport aux parallèles AE, IO, coupées par KA; les ∧ AIE, IKO sont égaux par une raison semblable par rapport aux parallèles IE, KF, coupées par la même sécante; d'ailleurs, le côté AI = IK par hypothèse; donc ces deux triangles ont un côté égal adjacent à des angles égaux, et sont égaux. On en conclut que le côté AE = IO; mais IO, EF sont égaux comme parallèles entre parallèles (l. 1, p. 25, r.); donc aussi AE = EF; on démontre de même que EF = FG = etc.

PROPOSITION V.

THÉORÈME. — FIG. 84.

Deux parallèles BC, DE *déterminent, sur deux transver-*

sales AB, AC, *des segments proportionnels, de façon que l'on a* AD : DB : AB : : AE : EC : AC, *et réciproquement.*

1° Supposons la droite DE parallèle à BC, je dis qu'on aura AD : DB : : AE : EC. Car si les droites AD et DB sont commensurables, supposons que AD : DB : : 4 : 3, c'est-à-dire que la commune mesure de ces lignes soit contenue 4 fois dans AD, et 3 fois dans DB. Portons cette commune mesure sur AD, DB; soient *a*, *b*, *c*, *d*, *e* les points de division; par ces points, menons des parallèles à BC; ces droites *af, bg*... DE, etc., étant toutes parallèles, et les distances A*a*, *ab*, etc., étant égales, les distances A*f*, *fg*, etc., seront aussi égales (p. 4); mais AE en contiendra 4, parce que AD en contient 4, et EC en comprendra 3, parce que DB en comprend 3. Donc AE : EC : : 4 : 3; d'ailleurs, AD : DB : : 4 : 3; donc enfin AD : DB : : AE : EC. On reconnaît de même que AD : AB : : AE : AC, etc. Si AD, DB n'ont pas de commune mesure, la rem. 4, pr. 3, prouve que la proposition est néanmoins vraie.

2° Soit menée du point D une droite DE′ différente de DE; elle ne coupera pas les droites AB, AC proportionnellement. Car on a AD : DB : : AE : EC. Or, AE′ est $>$AE, et E′C$<$EC; donc le rapport AE′ : E′C est plus grand que AE : EC, et par suite aussi plus grand que le rapport AD : DB. Donc de toutes les droites menées par D, la droite DE, parallèle à BC, est la seule qui coupe AB, AC en parties proportionnelles. Donc deux droites sont parallèles, si sur deux concourantes elles interceptent des parties proportionnelles.

Remarque. Chacune des droites AB, AC est divisée par DE en segments *additifs,* c'est-à-dire en segments dont elle est la somme. Ainsi, AB=AD+DB. Que si l'on considère AD, il est divisé au point B en deux segments *soustractifs* AB, DB, c'est-à-dire tels que AD=AB—DB.

Corollaire. — Fig. 85. *Des parallèles* AA′, BB′, etc., *déterminent sur deux transversales* AD, A′D′, *des segments proportionnels.* Car prolongez AD, A′D′ jusqu'à leur ren-

contre en O; la droite AA′, parallèle à BB′, donne

$$OB : OB' :: AB : A'B'.$$

De même, les parallèles BB′, CC′ donnent

$$OB : OB' :: BC : B'C'.$$

De ces deux proportions on déduit, à cause du rapport commun,

$$AB : A'B' :: BC : B'C'.$$

On démontre de même que $BC : B'C' :: CD : C'D'$, etc.

PROPOSITION VI.

THÉORÈME. — FIG. 86.

Deux parallèles AB, A′B′ *rencontrées par des droites concourantes* OA, OC, OD, OB, *sont divisées par ces droites en parties proportionnelles, de sorte que* $AC : A'C' :: CD : C'D' :: DB : D'B'$.

Du point C′ menez C′E parallèle à OA jusqu'à AB en E. Les concourantes CA, CO, coupées par les parallèles AO, C′E, donnent (p. 5.)

$$AC : AE :: OC : OC'.$$

Mais $AE = A'C'$ à cause du ▱ AEC′A′;

Donc $AC : A'C' :: OC : OC'$.

On prouvera de même que

$$CD : C'D' :: OC : OC'.$$

De ces deux proportions on conclut que

$AC : A'C' :: CD : C'D'$, et de même $:: DB : D'B'$.

Remarque. Ces rapports, égaux entre eux, sont aussi égaux aux rapports $OC : OC'$, $OA : OA'$, etc.

PROPOSITION VII.

Problème. — Fig. 87.

Diviser un segment de droite en parties proportionnelles à des droites données, ou en parties égales.

1° S'il faut diviser une droite AB en parties proportionnelles à des longueurs données a, b, c, on tire du point A, sous un angle arbitraire, une droite indéfinie AC sur laquelle on prend $AD=a$, $DE=b$, $EF=c$; on joint le point F au point B, et des points E, D on mène des parallèles à FB jusqu'à la rencontre de AB; les points de rencontre H, G diviseront la droite AB de la manière demandée. Car à cause des parallèles GD, HE, BF on a (p. 5, c.) AG : AD : : GH : DE : : HB : EF, ou, puisqu'on a pris $AD=a$, $DE=b$ et $EF=c$,

$$AG : a : : GH : b : : HB : c.$$

Donc la droite AB est divisée en G et H de la manière demandée.

Autrement. Soit (fig. 88) à diviser le segment A en parties proportionnelles à a, b, c. Sur une droite indéfinie, prenez $BC=a$, $CD=b$, $DE=c$; sur BE construisez un Δ équilatéral BFE, et prenez les distances FG, FK égales à A. Tirez GK, ainsi que FC, FD qui coupent GK en H, I. Je dis que la droite GK est égale à A, et qu'elle est divisée en H, I de la manière demandée. Car on a évidemment BF : FE : : GF : FK, de sorte que (p. 5) GK est parallèle à BE, et les angles FGK, FKG, égaux à B, E, seront égaux à BFE. Le Δ FGK est donc équiangle, par suite équilatéral, et $GK=FG=A$. D'ailleurs (p. 6) on a

$$GH : BC : : HI : CD : : IK : DE$$

ou $$GH : a : : HI : \quad : : IK : c;$$ donc, etc.

2° Les mêmes constructions peuvent servir à diviser un segment de droite en parties égales. On peut aussi, à cet effet, employer la construction suivante. Soit (fig. 89) AB un segment de droite à diviser en cinq parties égales. Menez du point

A une droite indéfinie AH sous un angle quelconque, et prenez-y, à partir du point A, une distance arbitraire qu'il faudra porter, à partir de ce même point A, 6 fois sur AH, et en général une fois de plus qu'il ne doit y avoir de divisions dans AB. Soient E, G, C les trois derniers points ainsi obtenus sur AH; joignez le point C au point B par la droite CB, et prolongez celle-ci d'une quantité BD égale à BC; si l'on joint le point D au point E, la droite DE coupera AB en un point F, et BF sera la cinquième partie de AB. Car EG étant égal à GC, et DB à BC, on a la proportion EG:GC:: DB:BC; donc (p. 5) la droite BG est parallèle à DE. Mais si DE ou FE est parallèle à BG, il s'ensuit que AB, AG sont coupées proportionnellement en F et E, de sorte que l'on a

AG : EG : : AB : FB.

Or EG est, par construction, le cinquième de AG; donc FB est aussi le cinquième de AB, et en portant FB encore 4 fois sur FA, on divisera AB en 5 parties égales.

PROPOSITION VIII.

Problème. — Fig. 90.

Trouver une quatrième proportionnelle à trois droites données a, b, c.

Soit fait un angle quelconque A, et soit pris AB=a, BC=b, AD=c. Si l'on tire BD, et que du point C on mène CE parallèle à BD jusqu'à la rencontre de AD prolongé, en E, la ligne DE sera la quatrième proportionnelle demandée.

Car les concourantes AC, AE, coupées par les parallèles BD, CE, donnent (p. 5)

AB : BC : : AD : DE

ou a : b : : c : DE;

donc DE est la ligne cherchée.

Déf. 5. — Fig. 91. Deux figures, lignes ou systèmes de

points isolés, sont dites *semblables* si on peut les placer de façon qu'à chaque point A, B, C... pris dans l'une, corresponde dans l'autre un point $a, b, c...$, tel, que les droites Aa, Bb, etc., qui joignent ces points correspondants, vont concourir en un même point O, et y sont divisées en segments proportionnels, soustractifs pour toutes ces droites, comme dans ABC, abc, de sorte que $OA : Oa :: OB : Ob$, etc., ou additifs pour toutes, comme dans ABC, $a'b'c'$, où $AO : a'O :: BO : b'O ::$ etc.

Deux figures semblables ainsi disposées sont dites *semblablement placées*.

PROPOSITION IX.

Théorème. — Fig. 91.

Il existe une infinité de figures semblables à une figure donnée ABC.

Car ayant pris à volonté un point O, qu'on joindra aux points A, B, C... de la figure donnée, on n'a qu'à prendre un point a arbitrairement sur OA, et déterminer sur OB, OC... les points $b, c...$, de façon que $OA : Oa :: OB : Ob :: OC : Oc...$; le lieu des points a, b, c, sera semblable à ABC... De même si, ayant pris à volonté a' sur OA, on fait en sorte que $OA : Oa' :: OB : Ob' :: OC : Oc'...$, $a'b'c'...$ sera semblable à ABC...

Déf. 6. Lorsque (fig. 91) les droites Aa, Bb, etc., sont toutes divisées au point O en segments soustractifs (ABC et abc), la similitude est dite *directe*. Dans le cas contraire, elle est dite *inverse* (ABC et $a'b'c'$).

Déf. 7. Le point O se nomme *centre de similitude*; toute droite menée par ce point est appelée *rayon vecteur*; le rapport $OA : Oa$, $OB : Ob$, etc., se nomme *rapport de similitude*.

La similitude directe se change en égalité si les rayons vecteurs sont parallèles et que $Aa = Bb =$ etc. (l. I) (alors le rapport de similitude est 1). La similitude inverse se change en symétrie si le rapport de similitude est 1.

Déf. 8.—**Fig. 91.** Dans deux figures semblables et semblablement placées, deux points A, *a*, situés sur le même rayon vecteur, de façon que le rapport OA : O*a* est égal au rapport de similitude, se nomment des *points homologues*.

Remarque. Si l'on suppose que le point *a* se rapproche indéfiniment de O, sans que le rapport OA : O*a* change, le point A s'en rapprochera également, et si *a* se confond avec O, il en sera de même de A. Donc O est un point homologue commun aux deux figures.

Déf. 9.—**Fig. 91.** Deux droites indéfinies AB, *ab*, déterminées par des points A, B, *a*, *b*, dont les deux derniers sont respectivement homologues des deux premiers, sont dites *droites homologues*. Les distances AB, *ab*, sont appelées *dimensions homologues*.

Remarque. Puisque OA : O*a* : : OB : O*b*, *les droites homologues* AB, ab, *sont parallèles* (p. 5), si les figures sont semblablement placées.

D'ailleurs (p. 6, r.) on a AB : *ab* : : OA : O*a*, de sorte *que le rapport des dimensions homologues est égal au rapport de similitude.*

PROPOSITION X.

Théorème. — Fig. 92.

Deux polygones ABCDE, abcde *sont semblables si les sommets forment deux systèmes semblables, et que les côtés de l'un soient des droites homologues de ceux de l'autre.*

Supposons que les points *a*, *b*, *c*, *d*, *e* forment un système semblable au système A, B, C, D, E, et que ces systèmes soient semblablement placés par rapport au point O. On aura OA : O*a* : : OB : O*q* : : OC : O*c* : :, etc.

Soit tiré un rayon vecteur quelconque OF, coupant AE en F, *ae* en *f*. Les droites homologues AE, *ae* sont parallèles (d. 9, r.); donc on a aussi OF : O*f* : : OA : O*a* (p. 5). Donc à chaque point F du contour ABCDE répond un point homologue *f* dans *abcde*, et ces deux figures sont semblables (d. 5).

Remarque 1. Tout point de AE ayant son homologue sur *ae*, il s'ensuit, 1° que toutes les figures semblables à une droite sont des droites; 2° que toute figure semblable à un polygone est un second polygone ayant autant de sommets que le premier.

Remarque 2. Pour construire sur une dimension donnée comme homologue de AB, un polygone semblable à ABCDE, on prend *ab* parallèle à AB, et égal à cette dimension donnée. On tire A*a*, B*b*, qu'on prolonge jusqu'à leur rencontre en O; on mène OC, OD, etc.; du point *b* on mène *bc* parallèle à BC, et terminée à OC; du point *c*, on mène *cd* parallèle à CD, etc. La figure *abcde* sera un polygone semblable à ABCDE : car à cause des parallèles on aura

OA : O*a* : : OB : O*b* : : , etc.

DÉF. 10. Dans deux polygones semblables, les sommets qui sont des points homologues se nomment des *sommets homologues;* les angles auxquels ces points servent de sommets sont nommés *angles homologues;* les côtés qui joignent des sommets homologues sont nommés *côtés homologues*, et les diagonales qui joignent des sommets homologues sont appelées *diagonales homologues*.

Remarque. Ces dénominations, ainsi que celles qui sont expliquées plus haut (d. 8 et 9), se conservent encore si les figures ne sont pas semblablement placées.

PROPOSITION XI.

THÉORÈME. — FIG. 92.

Deux polygones semblables ont les angles homologues égaux et les côtés homologues proportionnels; réciproquement, si dans deux polygones les angles sont égaux deux à deux, et si les côtés adjacents aux angles égaux sont proportionnels, ces polygones sont semblables.

1° Soient ABCDE, *abcde* deux polygones semblables et semblablement placés, O le centre de similitude. Les droites

ab, bc étant homologues de AB, BC, leur sont parallèles (d. 9, r.), et l'angle *abc* est égal à ABC; de même BCD=*bcd*, CDE=*cde*, etc. De plus (d. 9, r.) le rapport des dimensions homologues est égal au rapport de similitude; donc les rapports AB:*ab*, BC:*bc*, CD:*cd*, etc., sont égaux, et par suite les côtés homologues sont proportionnels.

2° Réciproquement, soient deux polygones ABCDE, $a'b'c'd'e'$ ayant les angles $A=a'$, $B=b'$...., $E=e'$, et les côtés proportionnels, de sorte que $AB:a'b'::BC:b'c'::$etc. Je dis que ces polygones sont semblables. Pour le prouver, sur une droite *ab* égale à $a'b'$, et homologue de AB, construisez le polygone *abcde* semblable à ABCDE; je dis qu'il est égal à $a'b'c'd'e'$. En effet, les polygones ABCDE, *abcde* étant semblables, on a l'angle $a=A$; mais par hypothèse $a'=A$; donc $a=a'$; de même $b=b'$, $c=c'$, $d=d'$, $e=e'$. De plus, la similitude des mêmes polygones ABCDE, *abcde* donne

$$AB:ab::BC:bc.$$

Mais par hypothèse $AB:a'b'::BC:b'c'$, et comme $a'b'=ab$, ces deux proportions ont les trois premiers termes communs; donc $bc=b'c'$. On démontre de même que $cd=c'd'$, $de=d'e'$, $ea=e'a'$. Donc les deux polygones *abdcde*, $a'b'c'd'e'$ sont égaux et superposables, et par suite $a'b'c'd'e'$ est semblable à ABCDE.

Remarque. S'il s'agit d'exprimer les conditions de la similitude par des équations entre les côtés et les angles, on voit que, pour deux polygones de n côtés chacun, il y a à exprimer d'abord la proportionnalité des côtés de l'un avec ceux de l'autre, ce qui forme $n-1$ équations; en second lieu, dès que $n-1$ angles d'un polygone sont égaux à autant d'angles du second (il ne s'agit ici que des polygones dont les côtés ne se coupent pas entre leurs extrémités, quoique les principes précédents soient vrais pour toute espèce de polygones), les angles restants sont égaux. Cela fait $2n-2$ conditions; mais parmi ces conditions il y en a encore 2 de trop; car $n-1$ côtés et les angles compris, au nombre de $n-2$, déterminent un polygone; il suffit donc d'exprimer la proportionnalité de $n-1$ côtés de part et d'autre, ce qui donne $n-2$ équations; en outre $n-2$ égalités entre les angles, ce qui fait $2n-4$, c'est-à-dire une de moins que pour l'égalité (l. 1, p. 29). Pour la similitude des ▵, il suffit de $2.3-4$ ou 2 conditions, ce que nous allons prouver en détail.

PROPOSITION XII.

Théorème. — Fig. 93.

Deux Δ ABC, abc *sont semblables* 1° *s'ils ont les côtés proportionnels;* 2° *s'ils ont un angle égal entre côtés proportionnels;* 3° *s'ils sont équiangles entre eux.*

1° Supposons qu'on ait AB:*ab*::AC:*ac*::BC:*bc;* sur une droite *a'b'* égale à *ab* et homologue de AB, construisez (p. 10, r. 2) un Δ semblable à ABC. La similitude donnera

AB:*a'b'*::AC:*a'c'*::BC:*b'c'*

Comparant avec les proportions précédentes, et remarquant que *a'b'*=*ab*, on conclut que *a'c'*=*ac*, *b'c'*=*bc*. Donc les Δ *abc*, *a'b'c'* sont égaux entre eux. Mais *a'b'c'* est semblable à ABC. Donc *abc* l'est aussi.

2° Supposons que l'angle *a* soit égal à A, et qu'on ait la proportion AB:*ab*::AC:*ac*. Ayant refait la construction précédente, on aura AB:*a'b'*::AC:*a'c'*, d'où l'on conclura que *ac*=*a'c'*. De plus, l'angle *a'* sera égal à A (p. 11), et par suite à l'angle *a*; donc les deux Δ *abc*, *a'b'c'* ont un angle égal compris entre côtés égaux, et sont égaux. Mais *a'b'c'* est semblable à ABC; donc *abc* l'est aussi.

3° Soit l'angle *a*=A, l'angle *b*=B, et *c*=C. Ayant encore fait la même construction, on aura dans les Δ semblables ABC, *a'b'c'*, l'angle *a'*=A, et par suite *a'*=*a;* de même l'angle *b'*=*b*. Donc les deux Δ *abc*, *a'b'c'* sont égaux comme ayant un côté égal adjacent à des angles égaux. Mais le Δ *a'b'c'* est semblable à ABC; donc *abc* l'est aussi.

Remarque 1. Dans les Δ semblables, les côtés homologues sont opposés à des angles égaux. Car le côté *ab* étant homologue de AB, les angles *a* et *b*, adjacents à *ab*, sont égaux à A et B adjacents à AB; donc aussi les angles *c*, C, opposés aux côtés homologues *ab*, AB, sont égaux.

Remarque 2. Pour que deux Δ soient semblables, il suffit qu'ils aient deux angles égaux chacun à chacun. Car

dès lors le troisième est aussi égal de part et d'autre (l. 1, p. 14), et les Δ sont semblables.

Remarque 3. Deux Δ semblables à un même troisième, sont équiangles entre eux, et par suite semblables.

Remarque 4. — Fig. 94. Les propositions précédentes prouvent que, dans les Δ, l'égalité des angles est une suite de la proportionnalité des côtés, et réciproquement. Il n'en est pas de même dans les figures de plus de trois côtés. Car pour ne parler que des quadrilatères, soit la figure ABCD ; si l'on mène à volonté la droite FE parallèle à DC, le quadrilatère ABFE aura les mêmes $\wedge$ que ABCD; mais comme le côté AB est commun, et que AF est différent de AD, les côtés adjacents aux angles égaux ne seront pas proportionnels. Ainsi, sans changer les angles, on peut changer les rapports des côtés. On peut aussi changer les angles sans changer les côtés.

Remarque 4. La correspondance entre les cas d'égalité des Δ, et les cas de similitude, est manifeste. Il y a aussi un cas de similitude analogue au cas d'égalité démontré l. 1, p. 18.

PROPOSITION XIII.

Théorème. — Fig. 95.

Deux Δ sont semblables s'ils ont les côtés parallèles ou perpendiculaires deux à deux.

1° Soient deux Δ ABC, A'B'C' ayant le côté AB parallèle à A'B', AC à A'C', BC à B'C'. Je dis qu'ils sont équiangles. Car les angles A et A', qui ont les côtés parallèles, sont égaux ou supplémentaires (l. 1, p. 10) ; il en est de même de B et B', de C et C'. Or, supposons que A, A' soient supplémentaires, je dis que B, B' ne sauraient l'être : car A+A' vaudrait 2 droits, de même que B+B', et la somme des 4 angles A, A', B, B' serait égale à 4 droits, ce qui ne se peut, puisque la somme de tous les 6 angles des deux Δ vaut 4 droits (l. 1, p. 14). Donc si A, A' sont supplémentaires, B, B' sont égaux, de même que C, C'. Mais si B=B' et C=C', on a aussi A=A', et les deux Δ sont équiangles et semblables (p. 12, 3°).

2° Dans le cas des côtés perpendiculaires, la démonstration est la même, vu que deux ∧ qui ont les côtés perpendiculaires sont égaux ou supplémentaires (l. 1, p. 10).

Remarque. Puisque les angles A, A′, qui ont les côtés parallèles, sont égaux, il s'ensuit que les côtés opposés BC, B′C′, qui sont aussi parallèles, sont homologues. Ainsi, dans le cas des côtés parallèles, ce sont les côtés parallèles qui sont homologues. De même, dans le cas des côtés perpendiculaires, ce sont les côtés perpendiculaires qui sont homologues.

PROPOSITION XIV.

Théorème. — Fig. 92.

Deux polygones semblables peuvent se décomposer en un même nombre de ∆ semblables chacun à chacun, assemblés par des sommets homologues. Réciproquement, deux polygones composés d'un même nombre de ∆ semblables chacun à chacun, et assemblés par des sommets homologues, sont semblables.

Soient les polygones ABCDE, *abcde* semblables et semblablement placés, O le centre de similitude. D'un sommet quelconque A menons des diagonales aux autres sommets du polygone ABCDE; dans le polygone *abcde* menons les diagonales homologues (d. 10). Les ∆ ABC, *abc* sont semblables; car A, B, C et *a*, *b*, *c* sont deux systèmes semblables (p. 10). On reconnaît de même que le ∆ ACD est semblable à *acd*, et que ADE l'est à *ade*.

De plus, les ∆ ABC, ACD ont de commun les sommets A, C; leurs semblables *abc*, *acd* sont assemblés par les sommets *a*, *c*; or *a* est homologue de A non-seulement dans les ∆ *abc*, ABC, mais encore dans les ∆ *acd*, ACD. De même *c*, C, etc.

Réciproquement, supposons que deux polygones ABCDE, *a′b′c′d′e′* soient composés d'un même nombre de ∆ semblables chacun à chacun, et assemblés par des sommets

homologues. Soit le Δ *a'b'c'* semblable à ABC, *a'c'd'* à ACD, etc.; sur une droite *ab* égale à *a'b'* et homologue de AB construisez le polygone *abcde* semblable à ABCDE. Le Δ *abc* semblable à ABC le sera à *a'b'c'* (p. 12, r. 3), et comme *ab*=*a'b'*, Δ *abc* sera=*a'b'c'*. De même, Δ *acd*=*a'c'd'*, etc. Donc les polygones *abcde*, *a'b'c'd'e'*, composés de Δ égaux et assemblés par des sommets homologues sont égaux, et *a'b'c'd'e'* est semblable à ABCDE.

PROPOSITION XV.

Théorème. — Fig. 96.

Deux figures adbec, a'd'b'e'c', *semblables à une troisième* ADBEC, *sont semblables entre elles.*

Supposons que *abc*..., ABC... soient semblablement placés par rapport à O, que *a'b'c'*..., ABC... le soient par rapport à O'. Soient A, B, C trois points de l'une des figures; *a*, *b*, *c*, *a'*, *b'*, *c'* leurs homologues respectifs dans les deux autres. Tirez les droites AB, BC, *ab*, *bc*, *a'b'*, *b'c'*. Parmi ces droites, celles qui portent les mêmes lettres seront parallèles (d. 9, r.), et les Δ *abc*, *a'b'c'* seront semblables (p. 13). Il s'ensuit que si sur *a'b'* comme homologue de *ab* (qui est parallèle à *a'b'*), on construit un Δ semblable à *abc*, et semblablement placé, ce nouveau Δ se confondra avec *a'b'c'* (p. 10, r. 2). Donc les Δ *abc*, *a'b'c'* sont semblablement placés par rapport à un point O″, et chaque point *a*,*b*,*c* de *adbc*, a son homologue *a'*,*b'*,*c'*, dans *a'd'b'e'c'*. Donc ces deux figures sont semblables.

Corollaire. Si *a'b'* était égal à *ab*, *b'c'* le serait à *bc*. Donc les droites *aa'*, *bb'*, *cc'*... seraient égales et parallèles, et (l. 1) les figures *abc*..., *a'b'c'*... seraient égales. Il s'ensuit que pour construire une figure semblable à une figure donnée ABC..., sur une dimension donnée, *ab* ou *a'b'*, homologue à AB, on peut prendre à volonté le centre de similitude.

Remarque. La pr. 15 est déjà prouvée pour les Δ (p. 12, r. 3).

PROPOSITION XVI.

PROBLÈME. — FIG. 97.

Sur une droite donnée ab *construire un polygone semblable à un polygone donné* ABCDE, *en prenant* ab *comme côté homologue d'un côté* AB.

De l'une des extrémités de AB on mènera des diagonales aux sommets opposés, afin de décomposer le polygone ABCDE en Δ. Au point *a* de la droite *ab* on fera l'angle *bac* égal à BAC, et au point *b* l'angle *abc* égal à ABC; le Δ *abc* ainsi formé sera semblable à ABC (p. 12, r. 2). Ensuite au point *a* de *ac* on fera l'angle *dac*=DAC, au point *c* l'angle *acd* égal à ACD, d'où résultera le Δ *adc* semblable à ADC. Enfin au point *a* de *ad* on fera l'angle *ead*=EAD, au point *d* l'angle *eda*=EDA, ce qui donnera le Δ *eda* semblable à EDA. Le polygone *abcde* sera semblable à ABCDE : car ces deux polygones sont composés de Δ semblables chacun à chacun, et assemblés par des sommets homologues (p. 14).

Remarque. Si l'on n'avait aucun égard à cette dernière condition, on trouverait plus d'un polygone. Car, d'abord, au lieu de faire au point *a* de la droite *ac* l'angle *dac* = DAC, et au point *c* l'angle *acd* = ACD, supposons qu'on fasse au point *c* l'angle *acd'* = CAD, et au point *a* l'angle *d'ac* = ACD; le Δ *acd'* sera semblable à ADC, et les deux quadrilatères ABCD, *abcd'*, quoique composés de Δ semblables, ne sont pas semblables, parce que ces Δ ne sont pas semblablement disposés. En second lieu, au lieu de prendre dans le nouveau Δ le côté *ac* comme homologue du côté AC du Δ ACD, on peut construire sur *ac* comme homologue de AD un Δ semblable à ACD, ce qui peut encore se faire de deux manières. Prenant de même *ac* comme homologue de CD, on aura encore deux Δ. On aura donc de la sorte 6 quadrilatères composés de Δ semblables à ceux dont se compose ABCD; encore a-t-on placé les Δ construits sur *ac*, de l'autre côté de cette ligne, par rapport à *abc*, comme ceux qui sont construits sur AC. Si on les plaçait aussi du même côté de *ac*, on aurait 12 quadrilatères. Enfin, si l'on opère sur *ab* et sur *bc* comme on a fait sur *ac*, on trouvera encore 12 Δ *additifs* et 12 Δ *soustractifs*. On aura donc 18 quadrilatères composés de Δ additifs semblables à ceux dont se compose ABCD, et 18 autres composés de pareils Δ soustractifs. Faisons abstraction de ces der-

niers, et prenons l'un des quadrilatères de la première espèce, par exemple *abcd*, pour achever le pentagone. Sur chacun des 4 côtés de *abcd* on pourra placer 6 △ additifs semblables à ADE, ce qui formera 24 pentagones composés de △ semblables à ceux de ABCDE. Chacun des 18 quadrilatères en donnant autant, on aura en tout 18.24 pentagones dont un seul a ses △ disposés comme ABCDE; c'est celui-là seul qui est semblable à ce dernier. Si le polygone ABCDE avait *n* côtés, le nombre des polygones construits sur *ab* homologue de AB, serait 18. 24. 30...... × (6*n*—6).

PROPOSITION XVII.

THÉORÈME. — FIG. 97.

Les contours des polygones semblables sont entre eux dans le rapport de similitude.

Soient les polygones semblables ABCDE, *abcde*. On a

$$AB : ab :: BC : bc :: CD : cd ::, \text{etc.}$$

D'où $AB+BC+CD+\ldots : ab+bc+cd+\ldots :: AB : ab$.

Ce qu'il fallait prouver.

PROPOSITION XVIII.

THÉORÈME. — FIG. 98.

Deux polygones réguliers du même nombre de côtés sont deux figures semblables; les centres y sont des points homologues, les rayons sont des dimensions homologues, ainsi que les apothèmes. Réciproquement, toute figure semblable à un polygone régulier est un second polygone régulier d'autant de côtés que le premier.

1° Les deux polygones réguliers AB..., *ab*..., ayant même nombre de côtés, l'angle au centre y sera le même (l. 2, d. 20); on pourra donc faire coïncider les centres, et les angles au centre, comme le montre la figure. Or à cause des rayons égaux AO, BO, CO... d'un côté, *a*O, *b*O, *c*O... de l'autre, on aura les proportions

$$AO : aO :: BO : bO :: CO : cO ::, \text{etc.}$$

Donc (d. 5) les deux systèmes de points A, B, C..., *a*, *b*, *c*..., sont semblables et semblablement placés, et (p. 10) les polygones le sont. Le point O étant le centre de similitude, est un point homologue commun; les rayons OA, *oa*, sont homologues, de même que les apothèmes OH, *oh*.

2° Réciproquement, soit donné un polygone régulier AB...., O son centre; toute figure qui lui est semblable est un polygone ayant ses angles respectifs égaux à A, B, C... (p. 10); c'est donc un polygone équiangle. De plus, les côtés de ce nouveau polygone étant proportionnels à AB, BC... qui sont égaux, seront aussi égaux, et le nouveau polygone sera équilatéral. Donc il est régulier.

Remarque 1. Pour que deux polygones réguliers non fermés soient semblables, il suffit qu'ils aient même nombre de côtés et même $\wedge$ au centre; car dès lors on peut leur appliquer le raisonnement ci-dessus (1°).

Remarque 2. Les contours de deux polygones réguliers semblables sont donc entre eux comme les rayons, et comme les apothèmes (p. 17).

Remarque 3. Dans un polygone régulier de *n* côtés, la somme des angles est $2\ (n-2)$, et chaque angle vaut $\frac{2\ (n-2)}{n}$, l'unité étant l'angle droit.

PROPOSITION XIX.

Théorème. — Fig. 99.

Tous les cercles sont semblables; les centres y sont des points homologues, les rayons sont des dimensions homologues. Réciproquement, toute figure semblable à un cercle est un cercle.

1° Soient deux cercles dont le centre commun est O. Tirez des rayons quelconques OA, OB, OC... On aura les proportions

$$OA : Oa :: OB : Ob :: OC : Oc...$$

Donc les droites Aa, Bb sont coupées proportionnellement en O, et les deux figures sont semblables. Le point O est homologue commun; OA, Oa sont homologues.

2° Soit un cercle OA : prenez son centre pour centre de similitude, et pour construire une figure quelconque semblable à ce cercle, sur des rayons quelconques OA, OB, OC déterminez des points a, b, c..., tels que $OA:Oa::OB:Ob::OC:Oc$... Les distances Oa, Ob, Oc seront égales, et le lieu des points a, b, c sera une circonférence ayant O pour centre.

Corollaire. Deux arcs semblables BC, bc, deux segments semblables BCD, bcd, répondent à des angles au centre égaux.

PROPOSITION XX.

Théorème. — Fig. 100.

Deux cercles inégaux, non concentriques, ont toujours deux centres de similitude, l'un direct, l'autre inverse, tous les deux sur la ligne des centres; si les cercles sont extérieurs l'un à l'autre, chacun de ces points appartient à deux tangentes communes, tangentes qui sont au nombre de quatre; s'ils sont tangents extérieurement, le centre de similitude inverse se confond avec le point de contact; s'ils sont tangents intérieurement, le centre de similitude direct se confond avec le point de contact.

1° Soient OA, oa les cercles, O, o leurs centres; tirez Oo. De O menez un rayon quelconque OA, et du point o menez le diamètre aa' parallèle à OA. Tirez Aa, Aa'; comme ao n'est pas égal à OA, la droite Aa coupera la ligne des centres en un point S; d'ailleurs Aa' coupe la ligne des centres en un point S'; je dis que S, S' sont deux centres de similitude, le premier direct, le second inverse. En effet, supposons que du point S comme centre de similitude directe on construise une figure semblable au cercle AO, en prenant a comme homologue de A; o sera homologue de O. Mais la nouvelle figure sera un cercle (p. 19) dont le centre devant être homologue de O, se confond avec o; donc ce cercle se confond avec le cercle ao, et le point S est un centre de similitude. Même raisonnement pour S'. Ces points sont les seuls centres de similitude des deux cercles. Car tout centre de similitude sera sur Oo, puisque O, o sont homologues.

2° Chacun des points S, S' appartient à deux tangentes communes : car si du point S on mène au cercle oa une tangente Sb, le rayon vecteur Sb rencontrera la figure semblable, c'est-à-dire le cercle OA, en un point B,

homologue de b; donc les rayons ob, OB sont homologues et parallèles; mais à cause de la tangente en b, l'angle Sbo est droit; donc SBO l'est aussi, et SB est tangente au cercle OA en B.

Puisque du point S on peut mener au cercle oa deux tangentes, ce point S sera le point de concours de deux tangentes communes; ces deux tangentes sont dites *extérieures*.

On prouve de même que le point S' est le point de concours de deux tangentes communes, dont l'une est Cc, et qui sont dites *intérieures*.

Ces quatre tangentes sont les seules qui soient communes : car toute tangente commune Bb, Cc répond à deux rayons de contact parallèles OB, ob ou OC, oc, joint par conséquent deux points homologues B, b ou C, c, et passe à l'un des centres de similitude S, S'; or, par chacun de ces points on ne peut mener que deux tangentes à l'un des cercles; donc il n'y a que quatre tangentes communes.

3° Si (fig. 101) les deux cercles, égaux ou non, se touchent extérieurement en S', menez deux rayons OA, oa parallèles et de sens contraire, tirez AS', aS' : les Δ AOS', aoS' auront l'angle O=o, à cause des parallèles; de plus, à cause des rayons, on a AO:ao::S'O:S'o. Donc ces Δ sont semblables (p. 12); par suite l'angle AS'O=aS'o, et la droite aS' est le prolongement de AS'; en outre on aura AS':aS'::AO:ao. Par conséquent toute droite Aa menée par S' est divisée en ce point dans un rapport constant, et S' est un centre de similitude inverse.

4° Pour deux cercles tangents intérieurement en S (fig. 102), on démontrera à peu près de même que S est le centre de similitude directe.

Remarque. Deux cercles égaux n'ont pas de centre de similitude directe : car (fig. 100) si OB=ob, les droites Bb, Oo sont parallèles.

DÉF. 12. — FIG. 103. La *projection* d'un point A sur une droite CD est le pied A' de la perpendiculaire AA' menée de A sur CD.

La *projection* d'une ligne AB sur une droite CD est la partie A'B' interceptée sur CD par les perpendiculaires menées des extrémités de AB sur CD.

PROPOSITION XXI.

THÉORÈME. — FIG. 104.

Si on projette le sommet de l'angle droit A *d'un* Δ *rectangle* ABC *sur l'hypothénuse* BC *en* D :

1° *Le* Δ ABC *sera décomposé en deux* Δ *semblables entre eux et au* Δ *total* ABC ;

2° *Chaque côté de l'angle droit sera moyen proportionnel entre l'hypothénuse entière et le segment adjacent;*

3° *La perpendiculaire* AD *sera moyenne proportionnelle entre les deux segments.*

En effet, 1° les Δ BAC, BAD sont rectangles, le premier en A, le second en D; ils ont l'angle B commun : donc le troisième ∧ C de l'un est égal au troisième ∧ BAD de l'autre, et les deux Δ sont semblables (p. 12). De même, les Δ ABC, ADC sont rectangles, ont l'angle C commun; par conséquent l'angle B du premier est égal à l'angle CAD du second, et les deux Δ sont semblables. Ainsi les trois Δ ABC, ADC, BDA sont semblables.

2° Les Δ ABC, ADB étant semblables, auront les côtés homologues proportionnels (p. 12). Or, le côté BC du Δ BAC et le côté BA du Δ BAD sont opposés aux angles droits et sont, par conséquent, homologues (p. 12, r. 1). De même BA du Δ BAC est opposé à l'angle C, BD du Δ BDA l'est à l'angle BAD qui est égal à C; donc ces deux côtés sont homologues, et l'on a la proportion

$$BC:BA::BA:BD. \qquad (1)$$

Les Δ BAC, DAC donnent de même la proportion

$$BC:AC::AC:CD \qquad (2)$$

et chaque côté de l'angle droit est moyen proportionnel entre l'hypothénuse et le segment adjacent.

3° Dans les Δ semblables BAD, DAC, les côtés BD, DA du premier sont homologues des côtés DA, DC du second; car BD et DA, dans le premier, sont opposés aux ∧ BAD, B; et DA, DC du second le sont aux ∧ C, CAD, respectivement égaux à ceux-là. Donc

$$BD:DA::DA:DC$$

et la perpendiculaire DA est moyenne proportionnelle entre les deux segments BD, DC de l'hypothénuse.

PROPOSITION XXII.

PROBLÈME. — FIG. 105.

Trouver une moyenne proportionnelle entre deux droites a, b *données.*

Sur une droite indéfinie BE prenez BD égal à a, DC égal à b. Sur BC comme diamètre décrivez une demi-circonférence; au point D élevez sur BC une perpendiculaire DA jusqu'à la rencontre de la demi-circonférence en A : DA sera la moyenne proportionnelle demandée. Car si l'on tire AB, AC, l'angle BAC, inscrit dans un demi-cercle, est droit (l. 2, p. 10, c. 2); donc, dans le Δ rectangle BAC, la perpendiculaire DA est moyenne proportionnelle entre BD et DC (p. 21, 3°), c'est-à-dire entre a et b.

Remarque. Comme AB est aussi moyenne proportionnelle entre BC et BD (p. 10, 2°) on peut dire : 1° *que la perpendiculaire* AD *abaissée d'un point de la circonférence sur un diamètre* BC *est moyenne proportionnelle entre les deux segments* BD, DC *de ce diamètre ;* 2° *que la corde* AB *est moyenne proportionnelle entre le diamètre* BC *et le segment adjacent* BD.

Remarque sur l'emploi des proportions en géométrie. Jusqu'ici nous avons fait un assez fréquent usage des proportions; toutes ces proportions peuvent être conçues sans qu'il soit nécessaire de supposer que les grandeurs qui y entrent sont évaluées en nombres ; car par une proportion telle que $A:B::a:b$, nous entendons que le nombre par lequel il faut multiplier B pour retrouver A, est le même que celui qui, pris pour facteur de b, reproduit a. Du reste, il est clair que si, au lieu de A et B on prend leurs expressions numériques rapportées à une même unité, la proportion subsiste encore. Par exemple si A vaut 12^m et B, 5^m, on pourra écrire

$$12^m:5^m::a:b \text{ ou } 12:5::a:b.$$

Car le rapport de 12^m à 5^m est $\frac{12}{5}$ comme celui de 12 à 5.

Il y a plus : toutes les fois qu'il s'agira de combiner des termes des proportions par multiplication, il faudra regarder ces termes comme des nombres abstraits. Il en est de même s'il s'agit de faire le produit de plusieurs lignes.

Déf. 13. Le *carré d'une ligne* est le produit de la mesure de cette ligne par elle-même ; le mot *carré* a donc ici la même signification qu'en arithmétique.

PROPOSITION XXIII.

Théorème. — Fig. 104.

Dans tout Δ rectangle : 1° le carré de l'hypothénuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, et réciproquement ; 2° le carré de l'hypothénuse est au carré d'un des côtés de l'angle droit comme l'hypothénuse est à la projection de ce côté sur cette hypothénuse ; 3° les carrés des côtés de l'angle droit sont entre eux comme leurs projections sur l'hypothénuse.

1° En effet, les proportions (1) et (2) démontrées, p. 21, donnent

$$BC.\ CD = \overline{AC}^2,$$

$$BC.\ BD = \overline{AB}^2;$$

ajoutant, on a $BC\ (CD+BD)$ ou $\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2$.

Donc le carré de l'hypothénuse, etc.

Cette propriété ne convient qu'au Δ rectangle ; car si, sans toucher aux côtés AB, AC, on fait varier l'angle A, le côté BC variera (p. 22, l. 1). Donc le carré de ce côté variera, et ne sera plus égal à $\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2$. Par suite, si cette même propriété a lieu dans un Δ, il est rectangle.

2° et 3° On a $\overline{AC}^2 = BC.\ CD$

et $\overline{AB}^2 = BC.\ BD;$

d'ailleurs $\overline{BC}^2 = BC.\ BC;$

donc $\overline{BC}^2 : \overline{AB}^2 :: BC.\ BC : BC.\ BD$,

ou $:: BC : BD$;

de même $\overline{BC}^2 : \overline{AC}^2 :: BC : CD$,

enfin $\overline{AB}^2 : \overline{AC}^2 :: BD : CD$;

ce qui démontre les deux dernières parties de l'énoncé.

Remarque. De $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$, on tire $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2$.

PROPOSITION XXIV.

THÉORÈME. — FIG. 106.

Dans tout Δ le carré du côté opposé à un angle oblique est égal à la somme des carrés des deux autres, moins ou plus le double produit de l'un de ces deux derniers par la projection du troisième sur le précédent, selon que l'angle oblique est aigu ou obtus.

Soit C un angle aigu du triangle ABC; projetons le point A sur BC en D, et supposons que D tombe dans le Δ. A cause du Δ rectangle ABD, on a (p. 23)

$$\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2.$$

Mais $BD = BC - DC$,

d'où $\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{DC}^2 - 2BC \times DC$.

Remplaçant $\overline{BD}^2$ par cette valeur, on obtient

$$\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 + \overline{BC}^2 - 2BC \times DC.$$

Mais $\overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 = \overline{AC}^2$, à cause du Δ rectangle ADC;

donc $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2BC \times DC$.

S'il s'agit du Δ AB′C, la perpendiculaire AD tombe au dehors. Mais on a encore

$$\overline{AB'}^2=\overline{AD}^2+\overline{B'D}^2\,;$$

d'ailleurs de $B'D=DC-B'C$, on tire

$$\overline{B'D}^2=\overline{DC}^2+\overline{B'C}^2-2DC\times B'C,$$

et par suite $\quad \overline{AB'}^2=\overline{AC}^2+\overline{B'C}^2-2DC\times B'C,$

ce qui était à prouver.

2° Soit le Δ AB'C où l'angle B' est obtus. Projetez A sur CB' prolongé en D; on a

$$\overline{AC}^2=\overline{AD}^2+(DB'+B'C)^2$$

$$=\overline{AD}^2+\overline{DB'}^2+\overline{B'C}^2+2DB'\times B'C.$$

$$=\overline{AB'}^2+\overline{B'C}^2+2DB'\times B'C.$$

Remarque. Dans cette prop. on se fonde sur ce que

$$(a\pm b)^2=a^2+b^2\pm 2\,ab.$$

PROPOSITION XXV.

Théorème. — Fig. 107.

Dans tout Δ ABC *la somme des carrés de deux côtés* AB, AC, *est égale au double carré de la distance de leur point de concours* A *au milieu* D *du côté opposé* BC, *plus le double carré de la moitié de ce côté.*

En effet, projetez le point A sur BC en E; l'angle ADB étant aigu, ADC sera obtus, et l'on aura (p. 24)

dans le Δ ADB $\quad \overline{AB}^2=\overline{AD}^2+\overline{BD}^2-2BD.\,DE,$

dans ADC $\quad \overline{AC}^2=\overline{AD}^2+\overline{DC}^2+2DC.\,DE;$

ajoutant, et n'oubliant pas que $BD=DC$, on a

$$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2\overline{AD}^2+2\overline{BD}^2,$$ *c. q. f. d.*

PROPOSITION XXVI.

THÉORÈME. — FIG. 108.

Dans tout quadrilatère la somme des carrés des côtés est égale à la somme des carrés des diagonales, plus quatre fois le carré de la droite qui joint les milieux des diagonales.

Soit ABCD un quadrilatère ; AC, BD les diagonales ; E, F leurs milieux ; tirez AE, CE, EF. Puisque E est le milieu de DB, on a (p. 25)

$$\overline{AB}^2+\overline{AD}^2=2\overline{AE}^2+2\overline{BE}^2.$$

De même $$\overline{BC}^2+\overline{DC}^2=2\overline{CE}^2+2\overline{BE}^2;$$

mais puisque F est le milieu de AC, le Δ AEC

donnera $$\overline{AE}^2+\overline{CE}^2=2\overline{AF}^2+2\overline{EF}^2.$$

Doublant les deux membres de cette égalité, l'ajoutant avec les deux précédentes, effaçant ensuite de part et d'autre $2\overline{AE}^2+2\overline{CE}^2$, on aura

$$\overline{AB}^2+\overline{AD}^2+\overline{BC}^2+\overline{DC}^2=4\overline{BE}^2+4\overline{AF}^2+4\overline{EF}^2;$$

mais $4\overline{BE}^2$ est le carré de 2BE ou de BD ; $4\overline{AF}^2$ est le carré de 2AF ou de AC ; donc le second membre de cette dernière égalité vaut $\overline{AC}^2+\overline{BD}^2+4\overline{EF}^2$.

Corollaire 1. Dans le ▱ les diagonales se coupant en leur milieu, la distance EF devient nulle, et la somme des carrés des côtés est égale à la somme des carrés des diagonales, propriété qui n'a lieu que si EF est nul, c'est-à-dire que dans le ▱.

Corollaire 2. — FIG. 109. Dans le carré les diagonales sont égales ; par suite le carré de chacune est double du carré d'un côté, ce que montre directement le Δ ABC rectangle en B ; car il donne (p. 23) $\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=2\overline{AB}^2$;

on en conclut que $\overline{AC}^2 : \overline{AB}^2 :: 2 : 1$,

ou $AC : AB :: \sqrt{2} : 1$.

La diagonale du carré est donc au côté, comme $\sqrt{2} : 1$. Elle est incommensurable avec le côté.

Dans le carré inscrit, le côté peut être regardé comme la diagonale du carré construit sur le rayon ; donc $AB : AO :: \sqrt{2} : 1$, c'est-à-dire que le côté du carré inscrit est au rayon comme $\sqrt{2} : 1$.

PROPOSITION XXVII.

Théorème. — Fig. 110, 111, 112.

Une circonférence qui rencontre deux droites concourantes y détermine, à partir du point de concours, quatre segments, inversement proportionnels, de sorte qu'on a

$$OA : OB :: OD : OC,$$

et réciproquement.

Tirez BC, DA. Les Δ OAD, OBC, ont en O un ∧ égal ou commun ; les ∧ ODA, OCB, ont pour mesure la moitié de l'arc AB, et sont par suite égaux. Donc ces Δ sont semblables et donnent la proportion

$$OA : OB :: OD : OC.$$

Cette proportion, dans le cas de la figure 112, peut s'écrire ainsi :

$$OA : OB :: OB : OC.$$

Réciproquement, si l'on a $OA : OB :: OD : OC$, les Δ OAD, OBC, ont un angle égal ou commun en O, compris entre côtés proportionnels et sont semblables ; donc les angles ODA, OCB sont égaux, et le cercle qui passe par les trois points A, B, C, passera par le point D, pour les figures 110, 111, et sera tangent à OB en B pour la figures 112 (l. 2, prob. 13, r.).

Remarque 1. — Fig. 112. La proportion $OA : OB :: OB : OC$ montre que le segment OB de la tangente, est moyen



proportionnel entre les segments OA, OC de la sécante, ce qui donne une autre solution pour le problème pr. 22.

Du reste, la remarque de cette même pr. 22, quant à sa première partie, est une conséquence de notre théorème actuel (pr. 27). Car si (fig. 110) une des cordes était un diamètre, et que l'autre fût perpendiculaire à ce diamètre, la proportion démontrée ici donnerait exactement la première partie de la propriété énoncée dans ladite remarque.

Remarque 2. On peut aussi reconnaître de nouveau que la diagonale du carré est incommensurable avec le côté. En effet, pour trouver (fig. 113) la commune mesure de la diagonale AC et du côté, on porte le côté AB sur la diagonale (pr. 2); comme $AC > AB$, que $AC < AB + BC$ ou $< 2AB$, il est clair que AB sera contenu dans AC une fois avec un reste FC. Comparons ce reste FC avec AB. Pour cela, du point A comme centre, avec le rayon AB, décrivons un cercle, et prolongeons CA jusqu'à la circonférence en E. L'angle ABC étant droit, la droite CB est tangente en B (l. 2, p. 6), et comme CE est une sécante, on aura (p. 27)

$$EC : BC :: BC : FC.$$

Par suite, au lieu de comparer FC à BC ou AB, on peut comparer AB à EC; AB est contenu dans EC deux fois avec un reste FC, qu'il faut de nouveau comparer à AB; donc l'opération ne se terminera pas, et les lignes AC, AB n'ont pas de commune mesure.

PROPOSITION XXVIII.

Problème. — Fig. 114.

Diviser une circonférence en 3, 6, 12, 24, *etc., parties égales.*

Divisons d'abord la circonférence en 6 parties égales, et, supposant le problème résolu, admettons que l'arc AB

soit $\frac{1}{6}$ de la circonférence. Tirons la corde AB, et les rayons AC, BC. Prenons l'angle droit pour unité; C sera $\frac{1}{6}$ de 4 droits, ou $\frac{4}{6}$, ou $\frac{2}{3}$, et comme la somme des $\wedge$ du Δ ABC vaut 2, on aura $A+B=2-\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$. Or, le Δ ACB est isocèle à cause des rayons AC, BC; donc les $\wedge$ A, B sont égaux, et chacun vaut la moitié de $\frac{4}{3}$. Ainsi, $A=B=\frac{2}{3}$ $=C$, et le Δ ABC est de plus équilatéral. On en conclut que la corde AB est égale au rayon AC. Donc, si l'on porte sur la circonférence 6 cordes consécutives égales au rayon, elle sera divisée en 6 parties égales en A, B, D, etc.

L'arc ABD sera le tiers de la circonférence. Par des bissections, on divisera en 12, 24, etc., 3.2^n parties égales.

Remarque 1. On saura donc inscrire et circonscrire les polygones réguliers de 3, 6, 12, etc., 3.2^n côtés.

Remarque 2. *Le côté du triangle équilatéral inscrit est au rayon du cercle* $::\sqrt{3}:1$. Soit (fig. 115) *abc*... un hexagone régulier inscrit; *ac* sera le côté du Δ équilatéral inscrit, et si l'on tire les rayons *oa*, *ob*, *oc*, la figure *abco* est un losange, puisque $ab=ao$; les diagonales *ob*, *ac* se coupent par conséquent à angle droit (l. 1, p. 27). Ainsi, dans le Δ rectangle *abk*, on a

$$\overline{ab}^2=\overline{ak}^2+\overline{bk}^2,$$

multipliant par 4... $4\overline{ab}^2=4\overline{ak}^2+4\overline{bk}^2.$

Mais $4\overline{ak}^2$ est le carré de $2ak$ ou de ac; $4\overline{bk}^2$ est le carré de $2bk$ ou de bo ou de ab;

Donc $$4\overline{ab}^2=\overline{ac}^2+\overline{ab}^2;$$

d'où $$3\overline{ab}^2=\overline{ac}^2,$$

puis $$\overline{ac}^2:\overline{ab}^2::3:1$$

et $$ac:ab::\sqrt{3}:1$$

PROPOSITION XXIX.

PROBLÈME. — FIG. 116.

Diviser une circonférence en 5, 10, 20, etc., *parties égales; puis en* 15, 30, etc.

Pour diviser une circonférence en 10 parties égales, supposons que l'arc AB soit $\frac{1}{10}$ de la circonférence dont C est le centre, AC le rayon. Tirez la corde AB, et le rayon BC. L'angle C sera $\frac{1}{10}$ de 4 droits ou $\frac{4}{10}$, ou $\frac{2}{5}$, l'angle droit étant l'unité ; par suite, les angles égaux BAC, ABC valent ensemble $2-\frac{2}{5}$ ou $\frac{8}{5}$, et chacun vaudra $\frac{4}{5}$ ou le double de C. Si donc on divise l'angle ABC en deux parties égales par une droite BD, chacune des moitiés DBA, DBC sera égale à $\frac{2}{5}$ ou à l'angle C. Donc 1° le Δ DCB sera isocèle, et BD=DC; 2° le Δ ABD sera semblable à ABC, vu que l'angle ABD=C, et que l'angle A est commun à ces deux Δ; comme le Δ ABC est isocèle, ABD le sera, et AB=DB; mais DB=DC; donc AB=DC.

D'ailleurs la similitude des Δ ABC, ABD, donne la proportion :

$$AC : AB :: AB : AD,$$

ou, vu que AB=DC,

$$AC : DC :: DC : AD.$$

Ainsi, pour savoir diviser la circonférence en **10** parties égales, il suffit de savoir diviser une droite CA en deux segments, dont l'un DC soit moyen proportionnel entre la droite entière AC, et l'autre segment AD ; ce qu'on appelle diviser la droite AC *en moyenne et extrême raison*. La pr. 30 enseigne cette construction.

La circonférence étant divisée en 10, le sera aussi en 5, et des bissections conduiront à diviser en 20, 40, etc., $5.\ 2^n$ parties égales.

Pour diviser la circonférence en 15 parties égales, soit toujours l'arc $AB=\frac{1}{10}$, et prenons l'arc $AE=\frac{1}{6}$; la différence BE sera $\frac{1}{6}-\frac{1}{10}=\frac{5}{30}-\frac{3}{30}=\frac{2}{30}=\frac{1}{15}$.

De là, la division en 15, 30, etc., $3.\ 5.\ 2^n$.

Remarque. Par suite, on saura inscrire et circonscrire aussi les polygones réguliers de 5, 10, etc., $5.\ 2^n$ côtés, et ceux de 15, 30, etc., $3.\ 5.\ 2^n$ côtés.

PROPOSITION XXX.

PROBLÈME. — FIG. 117.

Diviser une droite AB *donnée de longueur, en moyenne et extrême raison.*

A l'une des extrémités B de AB élevez à cette droite une perpendiculaire BC égale à la moitié de AB ; du point C comme centre, et du rayon CB décrivez une circonférence ; tirez AC, qui coupe la circonférence en D ; prenez AF égal à AD : la droite AB sera divisée au point F de la manière demandée.

En effet, AB, qui est perpendiculaire à l'extrémité B du rayon BC, est une tangente (l. 2, p. 6), et si l'on prolonge

AC jusqu'à la circonférence en E, on aura (p. 27) :

AE : AB :: AB : AD ou : AF,

de là AE—AB : AB :: AB—AF : AF.

Mais AB, étant double de BC, sera égal à DE, qui est aussi double de BC ; donc AE—AB est la même chose que AE—DE ou AD ou AF ; en second lieu AB—AF est la même chose que FB ; donc la proportion précédente devient

AF : AB :: FB : AF,

et, intervertissant, AB : AF :: AF : FB.

Par conséquent, le plus grand segment AF est moyen proportionnel entre le plus petit FB et la ligne entière AB.

Remarque. Comme on sait diviser la circonférence en 3 parties égales, on sait aussi diviser la moitié, le quart, le huitième, etc., et tous leurs multiples, en 3 parties égales, de sorte que k et n étant deux nombres entiers, et C la circonférence, l'expression générale de l'arc que l'on sait, d'après cela, diviser en 3 parties égales est $\frac{k.C}{2^n}$. On sait aussi diviser ce même arc en 5 parties égales. Enfin, comme on sait diviser la circonférence en 15 parties égales, on saura aussi : 1° diviser en 3 parties égales le 5e, le 10e, etc., et tous leurs multiples, c'est-à-dire l'arc $\frac{k.C}{5.2^n}$; 2° diviser en 5 parties égales le tiers, le 6e, le 12e, et leurs multiples, c'est-à-dire l'arc $\frac{k.C}{3.2^n}$. Chacune de ces divisions se fait au moyen d'un nombre déterminé de lignes droites et d'arcs de cercle ; c'est ce qu'on appelle une *opération géométrique*, au contraire du *tâtonnement* qui consiste en essais successifs dont on ne peut fixer le nombre *à priori*.

DÉF. 14. Un polygone *infinitésimal* est un polygone dont les côtés sont infiniment petits. (*Voyez Arithm.*, l. 3.)

PROPOSITION XXXI.

THÉORÈME. — FIG. 118.

Les circonférences des cercles sont entre elles comme leurs rayons, et, par suite, comme leurs diamètres.

Aux deux circonférences données, circonscrivez des polygones réguliers infinitésimaux semblables; le contour de chacun de ces polygones diffère infiniment peu de la circonférence inscrite. En effet, soit AB le côté d'un polygone régulier circonscrit, tirez le diamètre BD, le rayon AO, et l'apothème CO; le contour circonscrit étant plus grand que la circonférence, il s'ensuit que $CB > arc\ CB'$. D'un autre côté, $CB < arc\ CB' + BB'$, d'où $CB - arc\ CB' < BB'$.

Mais la tangente CB et la sécante BD donnent $\overline{CB}^2 = BB' \times BD$ (p. 27, r. 1);

d'où $$BB' = \frac{\overline{CB}^2}{BD} < \frac{\overline{CB}^2}{DB'} \text{ ou } < CB.\frac{CB}{DB'}; \text{ ainsi}$$

$$CB - arc\ CB' < CB.\frac{CB}{DB'}.$$

Multipliant cette inégalité par le double du nombre des côtés, et nommant P le périmètre du polygone, on a

$$P - circonf.\ CO < P\frac{CB}{DB'}.$$

Et comme le rapport $\frac{CB}{DB'}$ est infiniment petit, la différence entre P et le cercle CO l'est aussi.

Il en est de même de la seconde circonférence, de sorte que dans toute relation où ces circonférences seront combinées par multiplication, etc., on pourra les remplacer par les contours des polygones, et réciproquement. Or, les polygones infinitésimaux étant semblables, leurs contours sont entre eux comme les apothèmes, qui sont les rayons de nos cercles. Donc les circonférences sont aussi comme ces rayons.

Remarque 1. On voit ici, comme dans la p. 3, l. 3, quel est le parti que nous tirons de l'indétermination du nombre des côtés de nos polygones. Nous savons circonscrire à nos cercles des polygones à côtés aussi nombreux qu'on veut, et

par suite aussi petits qu'on veut par rapport aux rayons (ces rayons jouent donc ici le rôle de finies absolues, de même que les circonférences). Il suit de là qu'on peut imaginer des polygones dont les contours diffèrent des circonférences, aussi peu qu'on voudra, respectivement. Ainsi C, C′ étant les circonférences, R, R′ les rayons, P, P′ les contours des polygones, on peut concevoir ces polygones tels, que les rapports égaux $\frac{P}{R}$, $\frac{P'}{R'}$ diffèrent respectivement de $\frac{C}{R}$, $\frac{C'}{R'}$, de quantités moindres que telle fraction numérique assignée ; donc il est prouvé que la différence de $\frac{C}{R}$, $\frac{C'}{R'}$ est moindre que tout nombre, quelque petit qu'il soit. Par conséquent, cette différence est nulle et $\frac{C}{R}=\frac{C'}{R'}$. Ce sont encore bien là nos principes présentés sous forme développée, et appliqués au cas particulier.

Remarque 2. Le contour du polygone régulier infinitésimal inscrit diffère aussi infiniment peu de la circonférence ; car soit A′B′ un côté du polygone, OC′ son apothème, l'arc A′CB′ est $>$ A′B′ ; d'où *arc* CB′ $>$ C′B′. D'ailleurs,

arc CB′ $<$ CC′ $+$ C′B′ ; d'où *arc* CB′ — C′B′ $<$ CC′, et

$$(\text{vu que } \overline{C'B'}^2 = CC'.\,C'E \text{ p. 22}),\quad CC' < \frac{\overline{C'B'}^2}{C'E} < C'B'.\frac{C'B'}{OC}.$$

Multipliant encore par le double du nombre des côtés, on aura

$$\textit{Circonf.} - \textit{périm. inscrit} < \textit{périm. inscrit} \times \frac{C'B'}{OC};$$

mais $\frac{C'B'}{OC}$ est infiniment petit ; donc, etc.

Remarque 3. Nommons C, C′ deux circonférences, R, R′ leurs rayons ; on aura C : C′ : : R : R′ : : 2 R : 2 R′, ou bien C : 2R : : C′ : 2R′ ; ce qui prouve que le rapport d'une circonférence quelconque à son diamètre est le même pour toutes

les circonférences imaginables. Désignons-le par π, de sorte que $C : 2R = \pi$; d'où $C = 2R \times \pi = 2\pi . R$. Il s'ensuit que pour obtenir la longueur d'une circonférence, il suffit de multiplier son diamètre 2 R par π, rapport de la circonférence au diamètre. On trouvera plus bas un moyen de calculer π par approximation.

Archimède de Syracuse (mort 212 ans av. J.-C.) a prouvé que π est moindre que $\frac{22}{7}$; mais que la différence est $< \frac{1}{497}$. Adrien Métius, géomètre hollandais du dix-septième siècle, a donné pour π la valeur $\frac{355}{113}$, qui est en excès ; l'erreur est $< 3 : 10^7$. Ludolphe de Cologne l'a calculé avec 14 décimales, et Véga, géomètre autrichien, mort dans le siècle actuel, a poussé le calcul jusqu'à la 140e décimale *. On a $\pi = 3{,}141592653589793 + \ldots$ Du reste, Legendre a prouvé que ce nombre et son carré sont incommensurables. Jusqu'ici on ne connaît point de construction rigoureuse pour déterminer une droite égale en longueur à une circonférence dont le rayon est donné.

PROPOSITION XXXII.

PROBLÈME. — FIG. 119.

Étant donnés le rayon R *et l'apothème* r *d'un polygone régulier, trouver le rayon* R_1 *et l'apothème* r_1 *d'un polygone régulier de même périmètre et d'un nombre de côtés double.*

Soit AB un côté du polygone régulier donné, O son centre; OA sera le rayon R, OC perpendiculaire à AB sera l'apothème r, et AOB sera l'angle au centre. Le second polygone ayant deux fois autant de côtés que le premier, son angle au centre sera moitié de AOB; comme il a d'ailleurs

* Les Indous, au 12e siècle, connaissaient le rapport $\frac{3927}{1250} = 3{,}1416$, exact à moins de 1 cent-millième.

même périmètre que le premier, son côté sera moitié de AB. Or, si l'on prolonge l'apothème CO jusqu'à la circonférence en E, qu'on joigne AE, BE, l'angle inscrit AEB sera la moitié de l'angle au centre AOB, qui intercepte le même arc (l. 2, p. 9). L'angle AEB est donc l'angle au centre du polygone cherché. De plus, si du centre O on mène une perpendiculaire à la corde AE, le point de rencontre F sera le milieu de cette corde (l. 2, p. 3); menons donc du point F la droite FG parallèle à AB jusqu'à la rencontre de BE; les Δ semblables ABE, EFG donneront (p. 12, 3°) AE : FE :: AB : FG. Comme FE est la moitié de AE, FG sera la moitié de AB; FG est donc le côté du polygone cherché; et attendu que FEG en est l'angle au centre, et que le Δ FEG est isocèle, on peut regarder E comme le centre de ce polygone, FE comme le rayon R_1, et HE comme l'apothème r_1.

Cela posé, les parallèles FG, AB donnent (p. 5) HE : CE :: FE : AE ou :: 1 : 2, puisque AE est double de FE. Donc $HE = \frac{1}{2} CE$; mais $CE = CO + OE = r + R$; donc HE ou $r_1 = \frac{r+R}{2}$.

En outre, dans le triangle rectangle OFE, le côté FE de l'angle droit est moyen proportionnel entre l'hypothénuse OE, et le segment adjacent HE (p. 21, 2°), c'est-à-dire que OE : FE :: FE : HE, ou $R : R_1 :: R_1 : r_1$,

$$\text{d'où } R_1 = \sqrt{R \cdot r_1}.$$

Ainsi r_1 et R_1 sont connus.

Corollaire. La différence $R_1 - r_1$ *est moindre que le quart de la différence* R—r.

En effet, on a $R_1^2 = Rr_1$; donc

$$R_1^2 - r_1^2 = Rr_1 - r_1^2$$

ou (*Alg.*) $$(R_1 - r_1)(R_1 + r_1) = r_1(R - r_1);$$

de là $$R_1 - r_1 = \frac{r_1}{R_1 + r_1}(R - r_1).$$

Mais $R_1 > r_1$; donc $R_1 + r_1 > 2r_1$ et $\frac{1}{2} > \frac{r_1}{R_1 + r_1}$;

par suite $R_1 - r_1 < \frac{1}{2}(R - r_1)$.

D'un autre côté $R - r_1 = R - \frac{R+r}{2} = \frac{2R - R - r}{2} = \frac{R-r}{2}$.

Donc enfin $R_1 - r_1 < \frac{1}{4}(R - r)$.

PROPOSITION XXXIII.

Problème. — Fig. 120.

Calculer la valeur approchée du rapport de la circonférence au diamètre.

A cet effet, nous allons calculer le rayon d'une circonférence dont nous nous donnerons la longueur, puis nous diviserons la circonférence par le diamètre, et le quotient sera le nombre désigné par π (p. 31, r. 3).

Or, la circonférence circonscrite à un polygone régulier est plus grande que le périmètre du polygone, tandis que la circonférence inscrite est moindre que ce même périmètre; la circonférence qui serait de même longueur que ce périmètre est donc comprise entre ces deux premières circonférences; et puisque les circonférences sont proportionnelles à leurs rayons, on conclura que le rayon de cette troisième circonférence est compris entre les rayons des deux premières, c'est-à-dire entre le rayon et l'apothème du polygone.

Actuellement, prenons un carré dont le côté soit une unité de longueur; le périmètre sera 4; cherchons le rayon du cercle dont la circonférence a même longueur que le périmètre du carré. Le centre de ce carré est à l'intersection O de ses diagonales; le rayon sera donc AO, moitié de la diagonale, et l'apothème sera la perpendiculaire OI abaissée du centre O sur un côté AB. OI est moitié de IH ou BC qui est 1; donc $OI = \frac{1}{2}$. Quant à AO, c'est la moitié de la diagonale; or (p. 26, c. 2), le côté étant 1, la diagonale

est $\sqrt{2}$; donc $AO=\frac{1}{2}\sqrt{2}=\sqrt{\frac{1}{2}}$. Le rayon du cercle isopérimètre avec le carré est donc compris entre $\frac{1}{2}$ et $\sqrt{\frac{1}{2}}$. Mais si dans les formules du problème précédent on remplace r par $\frac{1}{2}$, et R par $\sqrt{\frac{1}{2}}$, on aura pour r_1 et R_1 l'apothème et le rayon de l'octogone régulier isopérimètre; r_1 et R_1 différeront moins que r et R, et le rayon de la circonférence est encore compris entre ces lignes r_1 et R_1. Au moyen de l'octogone, on trouvera le rayon et l'apothème du polygone régulier de 16 côtés; on continuera ainsi, et l'on trouvera que le rayon et l'apothème du polygone régulier de 16384 côtés sont tous les deux, jusqu'à la septième décimale, représentés par 0,6366196; par conséquent, le rayon de la circonférence isopérimètre, lequel est compris entre ces deux lignes, est aussi, au septième ordre près, égal à ce nombre. On divisera donc la circonférence 4 par le double de ce nombre, ou, ce qui revient au même, on divisera 2 par ce nombre 0,6366196, et l'on trouvera $\pi=3,14159+$, etc.

Remarque 1. Voilà donc la circonférence comparée aussi à la droite quant à la longueur.

Remarque 2. Prenons les nombres 0 et 1; l'apothème du carré est un moyen arithmétique entre 0 et 1; le rayon du carré, c'est-à-dire $\sqrt{\frac{1}{2}}$, est un moyen géométrique entre 1, et $\frac{1}{2}$. Donc on peut écrire

$$r=\frac{0+1}{2}, \qquad R=\sqrt{r.1}$$

$$r_1=\frac{r+R}{2}, \qquad R_1=\sqrt{r_1.R}, \text{ etc.}$$

Par conséquent, *si l'on considère une série de nombres dont les deux premiers sont* 0 *et* 1, *et dont les suivants sont alternativement moyens arithmétiques et moyens géométri-*

ques, chacun entre les deux précédents, ces nombres convergent indéfiniment vers le rayon de la circonférence 4.

Remarque 3. Trois questions se présentent ici : 1° pour avoir π avec une approximation déterminée, jusqu'à quel degré d'approximation faut-il calculer le rayon du cercle, rayon que nous désignerons par ρ? 2° combien faut-il calculer de rayons r_1, R_1, r_2, R_2, etc., pour avoir ρ avec cette approximation-là? 3° enfin, avec quelle approximation faut-il en conséquence calculer les premiers rayons et apothèmes?

1° Soit a la valeur approchée de ρ, β la différence, on aura

$$\rho = a + \beta.$$

La valeur exacte de π est $\frac{2}{\rho}$ ou $\frac{2}{a+\beta}$, celle que l'on calcule est $\frac{2}{a}$; l'erreur est donc $\frac{2}{a} - \frac{2}{a+\beta} = \frac{2\beta}{a(a+\beta)}$, quantité moindre que $\frac{2\beta}{a^2}$. Le premier apothème r est $\frac{1}{2}$ ou 0,5; le quatrième, ainsi que tous les suivants, est plus grand que 0,636, comme le calcul le montre; donc l'erreur est *à fortiori* moindre que $\frac{2\beta}{0{,}636^2}$, par conséquent moindre que 5β. Telle serait la limite de l'approximation si l'on prenait exactement $\frac{2}{a}$; mais on réduit cette quantité en décimales, et pour être certain du sens de l'approximation, on doit la calculer en plus, de même que $\frac{2}{a}$ est déjà approché en plus; soit q le quotient $\frac{2}{a}$ jusqu'à un certain ordre décimal, β' la partie négligée, de sorte que $\frac{2}{a} = q - \beta'$; on a $\frac{2}{a} - \pi < 5\beta$,

ou $q - \beta' - \pi < 5\beta$ et $q - \pi < 5\beta + \beta'$.

Si l'on calcule ρ à moins de $\frac{1}{10^\gamma}$, de sorte que $\beta < \frac{1}{10^\gamma}$, il est inutile de pousser le calcul de q plus loin qu'à l'ordre γ. Admettons que β' soit aussi moindre que $\frac{1}{10^\gamma}$, il s'ensuit que $q - \pi$ sera $< \frac{6}{10^\gamma}$. Si avec cela le dernier chiffre de q est égal ou supérieur à 6, on pourra le supprimer, et on aura π à moins de $\frac{1}{10^{\gamma-1}}$; car si l'on a, par exemple, $q = 3{,}14159267$ à $\frac{6}{10^8}$ près, on aura $q - \pi < \frac{6}{10^8}$, $\pi > q - \frac{6}{10^8}$ ou $> 3{,}14159261$ et $\pi < 3{,}14159267$; ainsi, *à fortiori* $\pi > 3{,}1415926$ et $< 3{,}1415927$... : donc les sept premières décimales sont bonnes et le résultat est approché en moins. Mais si le dernier chiffre était moindre que 6, on n'aurait que $\gamma - 2$ bons chiffres. En effet,

supposons que l'on ait $\gamma=9$ et $q=3{,}141592654$, il viendra $\pi<3{,}141592654$ et $\pi>3{,}141592648$; et tout ce qu'on peut conclure, c'est $\pi<3{,}14159266$ et $>3{,}14159264$, ou, en négligeant encore un chiffre, $\pi<3{,}1415927$ et $>3{,}1415926$. Si donc on tient à ce que tous les chiffres conservés soient bons, on voit que ρ étant calculé à moins de $\frac{1}{10^{\gamma}}$, π aura $\gamma-1$, ou au moins $\gamma-2$ bons chiffres, *sauf le cas* où le chiffre de rang γ étant <6, celui de rang $\gamma-1$ serait un zéro. Car si l'on a, je suppose, à $\frac{6}{10}$ près, un nombre $m<1{,}40004$; on aura $m>1{,}39998$; on aurait bien $m>1{,}399$, mais on ne saurait conclure $m<1{,}400$. Dans ce cas il faut pousser le calcul au moins jusqu'au second chiffre à la suite du dernier zéro. Un premier point établi, c'est donc qu'en calculant ρ à moins de $\frac{1}{10^{\gamma}}$, on est généralement certain d'avoir π avec $\gamma-2$ bons chiffres décimaux. Si l'on calcule le quotient $\frac{2}{a}$ en plus à moins de $\frac{1}{10^{\gamma}}$, selon que le dernier chiffre sera ou ne sera pas plus grand que 5, on conservera, dans le premier cas, le chiffre de rang $\gamma-1$, dans le second seulement celui de rang $\gamma-2$, et on aura π en moins.

2° Reste à trouver ρ à moins de $\frac{1}{10^{\gamma}}$. Supposons que l'on prenne un apothème r_n tel que $\rho=r_n+\alpha$, α étant une petite fraction, et que l'on calcule r_n à moins d'une autre fraction α'; soit a la valeur calculée, de façon que $r_n=a+\alpha'$, d'où $\rho=a+\alpha+\alpha'$; il faudra que $\alpha+\alpha'$ soit moindre que $\frac{1}{10^{\gamma}}$, condition que l'on peut remplir de bien des manières. Pour rester dans les fractions décimales, on n'a qu'à supposer α, ainsi que α', $<\frac{5}{10^{\gamma+1}}$, et l'on aura $\alpha+\alpha'<\frac{1}{10^{\gamma}}$. Mais α ou $\rho-r_n$ est $<R_n-r_n$; il suffit donc de poser d'abord $R_n-r_n<\frac{5}{10^{\gamma+1}}$, puis de calculer la valeur de r_n aussi à moins de $\frac{5}{10^{\gamma+1}}$. Or $R_1-r_1<\frac{R-r}{4}$;

de même $\qquad R_2-r_2<\frac{R_1-r_1}{4}<\frac{R-r}{4^2}$,

et en général $\qquad R_n-r_n<\frac{R-r}{4^n}$.

Comme $r=0{,}5$, que $R=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{2}$, et $\sqrt{2}=1{,}42-$ etc.,

on a $\qquad R-r<\frac{1}{2}(1{,}42-1)<0{,}21$, et $R_n-r_n<\frac{0{,}21}{4^n}$.

On posera donc $\qquad \frac{0{,}21}{4^n}<\frac{5}{10^{\gamma+1}}$ ou $4^n>\frac{21}{5}10^{\gamma-1}$,

puis $\quad n > \dfrac{\gamma - 1 + \log. 21 - \log. 5}{\log. 4}, \ n > \dfrac{\gamma - 0{,}375}{0{,}602}.$

Si l'on pose $\gamma - 2 = k$, on saura que pour avoir π avec k chiffres décimaux exacts, il suffit d'aller jusqu'à r_n, n étant déterminé par la formule

$$n > \frac{k + 1{,}625}{0{,}602},$$

puisque $\gamma = k + 2$. On calculera la valeur de r_n à moins de $\dfrac{5}{10^{\gamma+1}} = \dfrac{5}{10^{k+3}}$ en moins.

3° Voyons enfin ce qu'il faut faire pour avoir r_n à moins de $\dfrac{5}{10^{k+3}}$. Soient en général b_n, B_n des valeurs approchées de r_n, R_n ; e_n, E_n les erreurs ; on aura $r_n = b_n + e_n$, $R_n = B_n + E_n$. Par suite $r = b + e$, $r_1 = b_1 + e_1$, etc., $R = B + E$, etc. (1)

En vertu des formules trouvées (p. 32), on a r_1 ou $b_1 + e_1 = \dfrac{r + R}{2} =$

$$\frac{b + e + B + E}{2} = \frac{b + B}{2} + \frac{e + E}{2}. \qquad (2)$$

Supposons que tous les calculs se fassent à moins de $\dfrac{1}{10^{\delta}}$, δ étant à déterminer plus tard. Si $B + b$ est terminé par un chiffre impair en divisant par 2, on négligera la demi-unité de l'ordre δ, et l'on aura sur r_1 une erreur $e_1 < \dfrac{e + E}{2} + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{10^{\delta}}$. Admettons que e, E soient rapportés à $\dfrac{1}{10^{\delta}}$, on pourra écrire $e_1 < \dfrac{e + E + 1}{2}$. (3)

D'un autre côté on a $R_1^2 = r_1 R = r_1 B + r_1 E$, d'après (1), et encore $= b_1 B + e_1 B + r_1 E$. (4)

Or, on prend pour valeur de R_1 la racine carrée de $b_1 B$ à $\dfrac{1}{10^{\delta}}$; c'est cette racine qui est désignée par B_1 ; désignons l'erreur par E' ; on a $\sqrt{b_1 B} = B_1 + E'$. La formule (4) devient

$$R_1^2 - b_1 B \text{ ou } R_1^2 - (\sqrt{b_1 B})^2 = e_1 B + r_1 E\,;$$

d'où $\quad R_1 - \sqrt{b_1 B}$ ou $B_1 + E_1 - (B_1 + E') = \dfrac{e_1 B + r_1 E}{R_1 + \sqrt{b_1 B}} < \dfrac{e_1 R + r_1 E}{2\sqrt{b_1 B}}$;

de là, et vu que E' est $<$ une unité de l'ordre δ,

$$E_1 < 1 + \frac{e_1 R + r_1 E}{2\sqrt{b_1 B}}. \qquad (5)$$

Les formules (3) et (5) serviront à calculer les limites des erreurs ; on pourra y augmenter successivement tous les indices de 1, 2, 3 ... Comme

les valenrs exactes de R, r_1, etc., ne sont pas connues, on emploiera des valenrs excédantes pour le numératenr, des valeurs déficientes ponr le dénominatenr. Un calcul préliminaire montre que l'on a

$r = 0,5$; R est entre 0,70 et 0,71,
r_1 entre 0,60 et 0,61, R_1 0,65 0,66,
r_2 0,62 0,63, R_2 0,64 0,65; r_3 et R_3, par suite r_4, R_4, etc., sont entre 0,63 et 0,64; $\sqrt{b_1 B}$ tombe entre les mêmes limites. Avec ces limites on trouve

$$e = 0, \quad E < 1, \quad e_1 < 1, \quad E_1 < 2,02$$
$$e_2 < 2,01, \quad E_2 < 3,05, \quad e_3 < 3,03, \quad E_3 < 4,12.$$

A partir de là, en égard à ce qu'on vient de dire pour r_4, R_4, on aura

$$E_4 < 1 + (e_4 + E_3)\frac{64}{126} = 1 + \frac{e_4 + E_3}{63}.32; \text{ d'ailleurs } e_4 < \frac{1 + e_3 + E_3}{2}.$$

Représentons par y_n, Y_n des limites supérienres de e_n, E_n, et posons $c = \frac{32}{63}$; remplaçant E_4, E_3, e_4, e_3 par Y_4, Y_3, etc., nons pourrons poser

$$2y_4 = y_3 + Y_3 + 1, \qquad Y_4 = c(y_4 + Y_3) + 1\ *.$$
$$2y_5 = y_4 + Y_4 + 1, \qquad \text{etc.}$$

De là $\quad Y_3 = 2y_4 - y_3 - 1,$

et par substitution $\quad Y_4 = 3c\,y_4 - c\,y_3 + 1 - c$

Ensuite $\quad 2y_5 = y_4(3c+1) - cy_3 + 2 - c$

Si donc on prend $\quad 2y_5 = y_4(3c+1) + 2 - c \qquad (6)$

on augmentera y_5, y_4, etc.

Eu égard à $c = \frac{32}{63}$, cette relation (6) devient

$$y_5 = y_4 . \frac{53}{42} + \frac{47}{63} \qquad (7)$$

On s'assnre facilement que, appliquée à y_1, y_2, cette relation donne des valeurs trop petites; mais elle convient à y_3, y_4, etc.

Posant pour un instant $\quad \frac{53}{42} = g, \ \frac{47}{63} = h, \qquad (8)$

nous aurons donc la série d'équations

$$y_3 = gy_2 + h$$
$$y_4 = gy_3 + h$$
$$y_5 = gy_4 + h$$
etc.

* Ce sont des équations aux différences finies. On a intégré ici par des méthodes élémentaires; le calcul n'est pas plus compliqué que par les méthodes supérieures.

$$y_{n-1}=gy_{n-2}+h$$
$$y_n=gy_{n-1}+h.$$

Multipliant, en remontant, ces équations, respectivement par g^0, g^1, g^2,... g^{n-3}, et ajoutant, on trouve

$$y_n=g^{n-2}y_2+h(g^0+g^1+g^2+\text{etc.}+g^{n-3})$$
$$=g^{n-2}y_2+h.\frac{g^{n-2}-1}{g-1.}=g^{n-2}\left(y_2+\frac{h}{g-1}\right)-\frac{h}{g-1} \qquad (9)$$

Mais y_2, ou la limite de e_2, vaut 2,01, et l'on a

$$g=\frac{53}{42},\ \frac{h}{g-1}=\frac{47}{63}:\left(\frac{53}{42}-1\right)=\frac{47.42}{11.63}=\frac{94}{33}<2,9;$$

Donc

$$y_n<g^{n-2}\left(y_2+\frac{h}{g-1}\right)<\left(\frac{53}{42}\right)^{n-2}4,91.\frac{1}{10^\delta}\text{ en rétablissant le facteur }\frac{1}{10^\delta}. \qquad (10)$$

Et il suffit que ce nombre soit $<\frac{5}{10^{k+3}}$

Ainsi $\left(\frac{53}{42}\right)^{n-2}4,91.\frac{1}{10^\delta}<\frac{5}{10^{k+3}}$

d'où $10^{\delta-k-3}>\left(\frac{53}{42}\right)^{n-2}.\frac{4,91}{5}=\left(\frac{53}{42}\right)^{n-2}0,982$

et par logarithmes $\delta-k-3>(n-2)\,l.\frac{53}{42}+l.0,982$

$$\delta>k+3+(n-2)\,0,0929-0,008 \qquad (11)$$

d'ailleurs $n\overline{\geq}\frac{1000k+1625}{602}$

Supposons qu'on veuille obtenir π à moins de $\frac{1}{10^8}$:

on fera $k=8$, $n\geq\frac{9625}{602}$; on prendra donc $n=17$;

et (10) donne $\delta>11+15.\,0,0929-0,008=12,3855.$

Ainsi $\delta=13$.

On calculera donc r, R, r_1, R_1, etc., jusqu'à r_{17} (R_{17} est inutile).

Toutes ces valeurs seront calculées avec 13 décimales en moins : chaque division par 2, chaque racine carrée, sera poussée jusque-là.

On obtiendra ainsi la valeur de r_{17} avec 13 décimales, mais approchée à $\frac{5}{10^{11}}$ près en moins, et même à moins de $\frac{2}{10^{11}}$, comme le prouve la formule 10: cette valeur sera celle de ρ à $\frac{1}{10^{10}}$ près, également en moins: c'est cette même valeur encore que nous avons nommée α.

On divisera 2 par a, et on prendra 10 chiffres après la virgule, en calculant le quotient en plus. Si le 10e chiffre est >5, on le supprime et on a π à $\frac{1}{10^9}$ près en moins; sinon on supprime les deux derniers et on a π à $\frac{1}{10^8}$ près en moins, sauf le cas où l'avant-dernier serait un zéro; alors la partie supprimée serait moindre que $\frac{6}{10^{10}}$, et il faudrait aller jusqu'au second chiffre significatif après le zéro.

Du reste, pour tirer tout le parti possible de ce calcul, remarquons que ρ tombe entre a et $a+\frac{1}{10^{10}}$; par suite, π est entre $\frac{2}{a}$ et $\frac{2}{a+\frac{1}{10^{1}}}$; on n'a qu'à calculer ces quotients, et s'ils ont plus de 8 chiffres communs, ces chiffres seront bons. Quant aux simplifications dont ces calculs sont susceptibles, voyez une note à la fin de la Géométrie.

PROPOSITION XXXIV.

Problème. — Fig. 121.

Construire une droite dont la longueur soit à moins de 0,0001 du diamètre, égale à celle de la circonférence.

Menez deux diamètres perpendiculaires AB, CD; portez le rayon de C en E, ce qui donne un arc CE égal au sixième de la circonférence; tirez OE jusqu'à la rencontre de la tangente menée au point A; soit F le point de rencontre. Tirez BG tangent en B, et prenez BG=3 AO; la distance FG sera égale à la demi-circonférence AO, à moins de 0,0001 du rayon. En effet, menez EK perpendiculaire à AO; puisque EC $=\frac{1}{6}$ de circonférence AO, on a AE $=\frac{1}{4}-\frac{1}{6}=\frac{1}{12}$; donc AE+AK$=\frac{1}{6}$, et corde EK$=$rayon (p. 28), et EL$=\frac{1}{2}$, en prenant le rayon pour unité. Par suite le $\triangle$ rectangle ELO donne LO $=\sqrt{\overline{EO}^2-\overline{EL}^2}=\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{3}$, et à cause des $\triangle$ semblables ELO, FAO, on a AF:EL::AO : LO; d'où AF $=\frac{1}{2}:\frac{1}{2}\sqrt{3}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$. Cela posé, menant FH perpendiculaire à BG, on a FG $=\sqrt{\overline{GH}^2+\overline{FH}^2}$; mais GH $=$ GB $-$ AF $=3-\frac{\sqrt{3}}{3}$, FH $=2$; donc FG $=\sqrt{\left(3-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+4}=\sqrt{13+\frac{1}{3}-2\sqrt{3}}$.

Effectuant le calcul, on trouve $3{,}1415+\ldots$, valeur exacte à moins de un dix-millième du rayon.

APPENDICE AU LIVRE III.

LES TRANSVERSALES.

PROPOSITION I.

THÉORÈME. — FIG. 122.

Toute transversale A'C' *qui rencontre les trois côtés d'un* $\triangle$ *y détermine six segments tels, que le produit de trois de ces segments non consécutifs est constant, de sorte que*

$$AC'.\ BA'.\ CB' = BC'.\ CA'.\ AB';$$ *et réciproquement.*

1° Par le point A menez AD parallèle à la transversale jusqu'au côté opposé en D. A cause des parallèles AD, A'C', on a

$$A'B : A'D :: BC' : AC'$$

et $$A'D : A'C :: AB' : CB'$$

d'où $$A'B.\ AC' = A'D.\ BC'$$

$$A'D.\ B'C = A'C.\ AB'$$

Multipliant ces égalités membre à membre, et supprimant le facteur A'D commun aux deux membres du résultat, on a

$$AC'.\ BA'.\ CB' = BC'.\ CA'.\ AB'.$$

2° Réciproquement, *si trois points pris en nombre pair sur les côtés d'un* $\triangle$ *et en nombre impair sur leurs prolongements déterminent sur ces mêmes côtés six segments, dont trois, non consécutifs, forment un produit constant, ces trois points sont en ligne droite.*

Supposons qu'on ait AC'. BA'. CB'=BC'. CA'. AB'. Si le point A' n'est pas en ligne droite avec B' et C', supposons que A" le soit. On aurait aussi AC'. BA". CB'=BC'. CA". AB'; divisant ces deux égalités membre à membre, on a $\frac{BA'}{BA''} = \frac{CA'}{CA''}$, égalité impossible, le point A", qui est supposé en ligne droite avec B' et C', étant nécessairement sur le côté BC lui-même et non sur son prolongement.

Corollaire. — FIG. 123. Si la transversale A'C' fait avec AB et AC des angles égaux AB'C', AC'B', le ▵ isocèle AB'C' donnera AB'=AC'; la relation entre les segments est

AB'. CA'. BC'=AC'.BA'. CB';

supprimant les facteurs égaux AB', AC', il vient

CA'. BC'=BA'. CB',

ou BA':CA'::BC':CB'.

Si on suppose que A'C' se confonde avec sa parallèle AD, cette proportion devient BD:DC::BA:AC.

Or, dans ce cas, les angles BAD, DAC, égaux aux angles égaux en B' et C' sont égaux. Donc

La bissectrice AD *d'un angle* BAC *d'un ▵ divise le côté opposé* BC *en segments additifs proportionnels aux côtés adjacents.* — Cette droite AD est d'ailleurs évidemment la seule qui, menée de A, détermine de pareils segments sur BC, d'où il suit que la réciproque est vraie.

On reconnaît de même que AE, bissectrice de l'angle extérieur CAC', détermine sur BC prolongé deux segments soustractifs BE, CE, proportionnels aux côtés adjacents AB, AC, et réciproquement.

Ces propriétés se démontrent du reste fort simplement, d'une manière indépendante, et par la construction même employée pour la pr. 1.

Remarquez que la droite BC est divisée additivement en D, et soustractivement en E, dans le même rapport. C'est ce qu'on appelle la division *harmonique*.

PROPOSITION II.

THÉORÈME. — FIG. 124 ET 125.

Les droites AO, BO, CO, *qui joignent les trois sommets d'un ▵* ABC *à un même point* O *du plan de ce triangle, déterminent sur les côtés, ou sur leurs prolongements, six segments dont trois, non consécutifs, forment un produit constant, et réciproquement.*

1° En effet, dans le ▵ AA'C la transversale BB' donne (p. 1)

AB'. CB. A'O=CB'. BA'. AO.

Dans le ▵ AA'B la transversale CC' donne de même

CA'. BC'. AO=CB. AC'. A'O.

Multipliant ces deux égalités membre à membre, et supprimant de part et d'autre les facteurs communs CB, A'O, AO, on a

AB'. CA'. BC'=CB'. BA'. AC'.

2° Réciproquement *si trois points pris en nombre impair sur les côtés d'un ▵ et en nombre pair sur leurs prolongements, y déterminent six*

segments qui jouissent de la propriété précédente, les droites qui joignent ces points aux sommets opposés se coupent toutes les trois en un même point.

Cette réciproque se démontre à peu près comme celle de la proposition 1, en supposant que la droite AA' ne passe pas à l'intersection des deux autres.

Corollaire 1. — Fig. 126. *Les trois hauteurs d'un* ▵ *se coupent au même point.* Soient AA', BB', CC' ces trois hauteurs; les deux ▵ rectangles ABA', BCC' ont l'angle en B commun, sont semblables et donnent

$$\frac{BA'}{BC'}=\frac{BA}{BC}$$

Les ▵ BAB', CAC' donnent aussi

$$\frac{AC'}{AB'}=\frac{AC}{BA}$$

Enfin, les ▵ ACA', BCB' donnent

$$\frac{CB'}{CA'}=\frac{CB}{AC}$$

Multipliant ces trois égalités membre à membre, on trouve

$$\frac{BA'}{BC'}\times\frac{AC'}{AB'}\times\frac{CB'}{CA'}=1$$

ou $BA'\times AC'\times CB'=BC'\times AB'\times CA'$.

Comme d'ailleurs les trois points A', B', C' sont nécessairement en nombre impair sur les côtés et en nombre pair sur leurs prolongements, il s'ensuit que AA', BB', CC' se coupent en un point.

Corollaire 2. — Fig. 127. *Les trois droites qui joignent les sommets d'un* ▵ *aux points où les côtés opposés sont touchés par l'un quelconque des quatre cercles tangents aux trois côtés, se coupent au même point.* Car, soient A', B', C' les points de contact de l'un de ces cercles; on aura BA'=BC', AC'=AB', CB'=CA', d'où BA'. AC'. CB'=BC'. AB'. CA', ce qui prouve que les trois droites AA', BB', CC' se coupent en un point. Même raisonnement pour les trois autres cercles.

Corollaire 3. — Fig. 128. *Si l'on mène à volonté une parallèle* C' B' *à un côté* BC *d'un* ▵ ABC, *et qu'on joigne les extrémités de ce côté aux points* C', B' *déterminés sur les côtés opposés ou sur leurs prolongements, les droites ainsi tracées se couperont sur celle qui joint le sommet* A *au milieu* A' *de ce même côté* BC.

En effet, puisque B'C' est parallèle à BC, on a

$$AB':B'C::AC':C'B,$$

d'où $$AB'\times C'B=B'C\times AC'.$$

D'ailleurs $CA' = BA'$.

Multipliant, on a $AB' \times C'B \times CA' = B'C \times AC' \times BA'$.

Et les trois droites AA', BB', CC', se coupent en un point.

Si le point B' est pris au milieu de AC, le point C' sera aussi le milieu de AB, et par conséquent *les droites qui joignent les sommets d'un* Δ *aux milieux des côtés opposés, se coupent en un point.*

Ces droites se nomment les *médianes* du Δ.

DÉF. 1. — Si trois centres de similitude sont sur une droite, cette droite se nomme *axe* de similitude directe, ou inverse, selon que les centres se rapportent tous à la similitude directe ou non.

PROPOSITION III.

THÉORÈME. — FIG. 129.

Trois figures inégales mais semblables, et deux à deux semblablement placées, ont un axe de similitude.

1° Soient AB, A'B', A''B'' trois dimensions homologues, parallèles et de même sens; si l'on joint AA', BB', l'intersection O'' de ces droites sera un centre de similitude directe; on trouvera de même les deux autres O, O'. Les Δ semblables ABO'', A'B'O'' donnent la proportion

$$\frac{AO''}{A'O''} = \frac{AB}{A'B'}$$

de même AO'B, A''O'B'' donnent $\frac{A''O'}{AO'} = \frac{A''B''}{AB}$

enfin de A'OB',A''OB'' on tire $\frac{A'O}{A''O} = \frac{A'B'}{A''B''}$.

Si on multiplie ces trois égalités membre à membre, le produit des seconds membres se réduit à 1, et l'on a

$$\frac{AO''}{A'O''} \cdot \frac{A''O'}{AO'} \cdot \frac{A'O}{A''O} = 1$$

$$\text{ou} \quad AO'' . A''O' . A'O = A'O'' . AO' . A''O.$$

Ainsi, dans le Δ AA'A'', les trois points O, O', O'', situés sur les prolongements des côtés, y déterminent six segments tels que le produit de trois segments non consécutifs est égal au produit des trois autres. Donc O, O', O'' sont en ligne droite (p. 1).

2° Dans le cas de la figure 130, O, O' sont des centres de similitude inverse situés par conséquent sur les côtés mêmes du triangle AA'A''; O'' est un centre de similitude directe situé sur le prolongement d'un côté. En raisonnant comme dans le premier cas, on prouvera que ces trois points sont en ligne droite.

Corollaire. — Trois cercles inégaux et non concentriques ont quatre axes de similitude, directe pour l'un des axes, inverse pour les trois autres.

1° **Fig. 131.** Les cercles ne présentent point de contact. Soient O, O', O″ les centres des cercles; S, S', S″ leurs centres de similitude directe; T, T', T″ les centres de similitude inverse. D'abord S, S', S″ sont en ligne droite, et chacun de ces points est en ligne droite avec deux des points T, T', T″, ce qui donne les axes SS'S″, ST'T″, S'TT″, S″TT'.

2° **Fig. 132, 133.** Si l'un des cercles O touche les deux autres O', O″ *de la même manière*, c'est-à-dire tous les deux extérieurement (fig. 132) ou tous les deux intérieurement (fig. 133), les points de contact sont des centres de similitude de même espèce. Donc ils sont en ligne droite avec S centre de similitude des cercles touchés en O', O″.

3° **Fig. 134.** Dans le cas où l'un des cercles O touche les deux autres de différentes manières, l'un des points de contact T' est un centre de similitude inverse; l'autre, S″, directe. Donc ces points T', S″ sont en ligne droite avec T, centre de similitude inverse des cercles touchés O', O″.

Déf. 2. — Fig. 135. Nous avons dit qu'une droite AB est divisée *harmoniquement* en C et D, si chacun de ces points la divise en segments dont le rapport est le même; le point C détermine des segments additifs; ceux que détermine D sont soustractifs, et l'on a la proportion

$$AC:BC::AD:BD. \qquad (1)$$

On peut aussi écrire la proportion ainsi :

$$DB:CB::DA:CA.$$

Et l'on voit que la droite DC est aussi divisée harmoniquement en B et A.

Les quatre points A, B, C, D sont appelés *points harmoniques* ou *système harmonique :* A et B sont dits *points conjugués;* de même C, D sont des points conjugués.

Si trois des points du système sont donnés, le quatrième peut se trouver. Car si c'est D qui manque, de (1) ci-dessus on tire

$$AC-BC:AC::AD-BD:AD \qquad (2)$$

Et ici il n'y a que le quatrième terme d'inconnu. De même de chacun des trois autres points. Le point manquant est, dans chaque cas, déterminé d'une manière unique.

De la proportion AC:BC::AD:BD, on tire

$$AC.\ BD=BC.\ AD \qquad (3)$$

C'est-à-dire que le produit des segments extrêmes AC, BD, est égal au produit du segment moyen BC par le plus grand AD.

La relation (3) peut être mise sous la forme suivante

$$(AD-CD)\ BD=(CD-BD)\ AD.$$

Celle-ci ne contient plus que les distances au point D; elle donne

$$2.\ AD.\ BD=CD.\ BD+CD.\ AD$$

Et si l'on divise par AD. BD. CD, on a

$$\frac{2}{CD}=\frac{1}{AD}+\frac{1}{BD}$$

On voit que l'inverse de CD est moyenne entre les inverses de AD et BD.

La distance CD s'appelle la *moyenne harmonique* de AD, BD.

On a de même $$\frac{2}{AB}=\frac{1}{AC}+\frac{1}{AD}$$

Et AB est la moyenne harmonique de AC, AD.

Remarque. Les centres de deux cercles, et leurs centres de similitude, sont harmoniques.

DÉF. 3. — On appelle *faisceau harmonique* un système de quatre droites concourantes, coupant harmoniquement toute transversale. Ces quatre droites se nomment les *rayons ;* ceux qui passent par deux points conjugués sont dits *rayons conjugués.*

DÉF. 4. — FIG. 136. Soit un quadrilatère ABCD, et les diagonales AC, BD. Si l'on prolonge les côtés opposés AB, CD jusqu'à leur rencontre en E, et de même AD, BC jusqu'en F, la droite E F est appelée la *troisième diagonale* du quadrilatère.

PROPOSITION IV.

THÉORÈME. — FIG. 136.

Dans tout quadrilatère ABCD, *une diagonale quelconque* AC *est divisée harmoniquement par les deux autres* BD, EF, *de façon que*

AG:CG::AH:CH.

En effet, dans le ▵ ABC les trois droites menées de D aux sommets A, B, C, déterminent sur les côtés six segments qui donnent

AE. BF. CG=BE. CF. AG

Dans le même ▵ ABC, la transversale EF donne la relation

AH.BE.CF=CH.AE.BF

Multipliant ces égalités membre à membre et supprimant les facteurs communs, on a AH. CG=CH. AG, ce qui revient à la proportion à démontrer. — Au lieu du ▵ ABC, on peut considérer ACD, ou ACF ou ACE.

Pour la diagonale BD on considère l'un des ▵ ABD, CBD, EBD, FBD; avec le premier, le point C et EF; avec le second, le point A et EF, etc.

Remarque. — Si l'on regarde AB, CD, BD, AC comme les côtés du quadrilatère, les diagonales seront AD, BC, EG, et l'on aura aussi

AK:DK::AF:DF, etc.

PROPOSITION V.

Théorème. — Fig. 136.

Les droites EA, EG, EC, EH *qui joignent un point quelconque* E *à quatre points harmoniques* A, G, C, H, *forment un faisceau harmonique.*

Tirez du point A une droite quelconque AF, et soient K, D, F les points où elle est coupée par EG, EC, EH. — Tirez FC qui coupe AE en B, et menez BD; je dis que BD passera en G. Car, dans le quadrilatère ABCD la diagonale AC doit être coupée harmoniquement par BD et EF; donc BD passe en G. Par suite, la droite AD est coupée harmoniquement en K et F. Donc toute droite menée par A est coupée harmoniquement par EG, EC, EH. Or si l'on mène quelque part une parallèle à AD, elle sera divisée en segments proportionnels à ceux de AF. Donc les droites menées de E forment un faisceau harmonique.

Remarque. Si l'on prolonge les quatre rayons au delà de E, toute transversale qui rencontre quatre des huit segments de droites qui partent de E est coupée harmoniquement.

Corollaire. Les deux côtés d'un angle, sa bissectrice et celle de son supplément forment un faisceau harmonique (pr. 1, c.).

PROPOSITION VI.

Théorème. — Fig. 137.

Soient sur une droite AI *deux segments égaux* AB, BC; *si d'un point quelconque* O *on mène à cette droite une parallèle* OD, *que de plus on joigne* OA, OB, OC, *les quatre droites qui concourent en* O *forment un faisceau harmonique.*

Du point B menez une transversale quelconque ED; soient E, F, D ses points de rencontre avec AO, OC, OD; les ▵ semblables EAB, EOD donnent EB:ED::AB:OD. De même de BFC, FOD on tire FB:FD::BC ou AB:OD. D'où EB:ED::FB:FD. Donc les points E, B, F, D sont harmoniques, etc. (p. 5).

Réciproquement, si dans un faisceau harmonique OA, OB, OC, OD, on mène une transversale AI parallèle à un rayon OD, les trois autres rayons y intercepteront des segments égaux. Car OC étant le conjugué de OA, si l'on joint le point O au milieu B de AC, on aura le conjugué de OD; donc

ce conjugué passe au milieu de AC, c'est-à-dire en B, et se confond avec OB.

Remarque. Cette prop. est un cas particulier de la précédente.

PROPOSITION VII.

Théorème. — Fig. 138.

Si d'un point O *pris sur le plan d'un angle* BAC, *on mène des transversales* OF, OH, OI, *que l'on joigne les points où elles coupent les côtés de l'angle par les droites* EF, DH, GH, EI, PG, RI, *le lieu des points* L, K, M *est une droite passant au sommet* A *de l'angle donné.*

Car dans le quadrilatère EDFH, la droite AK divise EH dans le rapport de HO:EO; de même dans le quadrilatère GEHI, AL coupe EH dans ce même rapport. Donc AL se confond avec AK, de même avec AM. Donc les points L, K, M sont en ligne droite avec A.

Remarque. La droite OA forme avec AB, AS, AC un faisceau harmonique, puisque les quatre points O, E, S, H sont harmoniques.

Déf. 5. Le point O est appelé *le pôle* de AK par rapport à l'angle BAC, et la droite AK est dite *la polaire* de O par rapport au même angle.

Remarque. Les propositions précédentes fournissent des moyens simples pour

1° Trouver le quatrième harmonique de trois points donnés;

2° Mener par un point donné une droite qui aille passer par le point de concours de deux droites qui ne sont pas prolongées jusqu'à ce point.

PROPOSITION VIII.

Théorème. — Fig. 139.

Dans un faisceau harmonique, chaque point d'un rayon est le pôle du rayon conjugué, par rapport à l'angle des deux autres rayons.

Soient OA, OC deux rayons conjugués; OB, OD les deux autres. D'un point A pris sur OA soit menée une transversale quelconque AD; les quatre points A, B, C, D, seront harmoniques. Menez du même point A une seconde transversale AG, et tirez BG, DE; le point I où ces droites se coupent sera sur OC, puisque les quatre droites concourant en O forment un faisceau harmonique. — Donc le point A pris à volonté sur OA est le pôle de OI par rapport à l'angle EOG. — Même raisonnement pour chacun des rayons.

PROPOSITION IX.

Théorème. — Fig. 140.

Étant donnés quatre points harmoniques A, C, B, D, *le lieu des points dont le rapport des distances aux points conjugués* C, D, *est égal à* BC:BD, *est un cercle ayant pour diamètre la distance* AB *des deux autres points conjugués.*

Soit E un point tel que l'on ait

CE:ED::CB:BD

Si l'on tire EB, cette droite, divisant le côté CD du ▵ CED en segments, proportionnels aux côtés CE, ED, sera la bissectrice de l'angle CED (p. 1).

Mais on a aussi DB:BC::DA:CA

Cette prop. et la précédente donnent

DA:CA::CE:ED

Et les segments soustractifs de DC étant également proportionnels aux côtés CE, ED, il s'ensuit que AE est la bissectrice de l'angle CED'; donc AEC+CEB=moitié de D'EC+CED=1 droit. Par conséquent, le lieu du point E est la circonférence décrite sur AB comme diamètre (l. 2, prob. 13, r.).

Réciproquement tout point F de la circonférence donne FC:FD::BC:BD. Car les quatre points A, C, B, D, étant harmoniques, les droites FA, FC, FB, FD formeront un faisceau où les rayons conjugués FA, FB, sont perpendiculaires, à cause de l'angle inscrit AFB. Or si l'on mène IK parallèle au rayon AF, les segments BI, BK seront égaux (p. 6); de plus, à cause des parallèles IK, AF, les angles FBK, FBI, sont droits. Donc les ▵ FBK, FBI sont égaux, et FB est la bissectrice de l'angle KFI; par suite FC:FD::BC:BD.

Remarque. — Il est prouvé ici que si deux rayons conjugués AF, FB, d'un faisceau sont perpendiculaires entre eux, l'un d'eux FB est la bissectrice de l'angle CFD des deux autres rayons.

PROPOSITION X.

Théorème. — Fig. 141.

Si d'un point quelconque C *d'une droite* AB *on mène à un cercle deux tangentes* CG, CH, 1° *le diamètre* EF *perpendiculaire à la droite* AB *sera coupé par la sécante de contact* GH, *en un point* K, *formant avec les points* F, D, E *un système harmonique;* 2° *toute droite menée par* K *sera coupée harmoniquement par* AB *et la circonférence.*

1° Tirez CO, qui sera perpendiculaire à GH, et le ▵ rectangle CGO donne

$$IO:GO::GO:OC$$

Les ▵ CFO, IKO donnent

$$IO:OK::OF:OC$$

A cause des extrêmes communs, ces proportions donnent (en mettant DO pour GO)

$$KO:DO::DO:OF \text{ d'où } KO=\frac{\overline{DO}^2}{OF}$$

Ce qui montre d'abord que KO ne dépend pas de IO ni de OC, et ne change pas si le point C se meut sur AB.

De plus, de cette proportion on tire

$$DO+KO:DO-KO::OF+DO:OF-DO$$

ou $$KE:DK::FE:FD$$

Donc les quatre points F, D, K, E sont harmoniques.

2° Tirez CK, joignez le point F aux points L, M, où cette droite coupe la circonférence. — Puisque le diamètre DE est divisé harmoniquement en K et F, on a (p. 9) FD:DK::FL:KL::FM:KM

Donc (p. 1, e.) FK est la bissectrice de l'angle MFL; par suite cette droite, sa perpendiculaire FA et les côtés MF, FL forment un faisceau harmonique, et les points C, L, K, M sont harmoniques.

PROPOSITION XI.

Théorème. — Fig. 141.

Si d'un point K, *pris sur le plan d'un cercle, on mène des sécantes* GH, G'H', *etc., et les tangentes correspondantes* GC, HC, *etc., le lieu du point* C *sera une droite perpendiculaire à celle qui joint le point* K *au centre* O.

Des points C, C', menez sur OK les perpendiculaires CF, C'F'; on aura, par la pr. précédente :

$$OK:OD::OD:OF$$
$$OK:OD::OD:OF'$$

Donc OF=OF', et les points C, C' sont sur une perpendiculaire à OK.

Déf. 6. Le point K se nomme le *pôle* de CC', et CC' la *polaire* de K, par rapport au cercle. La relation $OK\times OF=\overline{OD}^2$, montre que si $OK>OD$, on a $OF<OD$, et réciproquement; si donc le pôle est hors du cercle, la polaire coupe la circonférence; si le pôle est dans le cercle, la polaire est extérieure. Si OK=OD, on a aussi OF=OD. Donc, si le pôle est

sur la circonférence, la polaire est tangente en ce point. Les points K et F sont d'ailleurs toujours du même côté du centre ; à mesure que l'un d'eux se rapproche du centre, l'autre s'en éloigne.

PROPOSITION XII.

Théorème. — Fig. 142.

Si la polaire coupe la circonférence, les droites qui joignent le pôle aux intersections sont des tangentes.

Soit DE la polaire, A le pôle ; tirez AO qui sera perpendiculaire à la polaire, et la coupe en un point B ; tirez DO. On a (p. 10)

BO:CO::CO:AO

ou BO:DO::DO:AO

Donc les $\triangle$ ADO, BDO sont semblables, et l'angle ADO = DBO qui est droit. Par suite AD est une tangente, de même que AE.

PROPOSITION XIII.

Théorème. — Fig. 143.

D'un point A *pris dans le plan d'un cercle, soient menées deux transversales quelconques* AB, AC ; *soient joints deux à deux les points* E,B,C, D *où elles coupent la circonférence ; les nouveaux points* G, F, *ainsi déterminés seront sur la polaire du point* A.

Tirez FG ; dans le quadrilatère FEGB, la diagonale FG coupe harmoniquement les droites AB, AC en I, H ; la polaire de A jouit de la même propriété. Donc ces droites se confondent, et F G est la polaire de A.

PROPOSITION XIV.

Théorème. — Fig. 144.

Si aux quatre sommets B,C,D,E *d'un quadrilatère inscrit, on mène des tangentes, lesquelles forment un quadrilatère circonscrit* LMKN : 1° *les diagonales des deux quadrilatères se couperont en un même point* G *situé en ligne droite avec deux sommets opposés du quadrilatère circonscrit, et l'intersection de deux côtés opposés du quadrilatère inscrit ;* 2° *les intersections* F,O,A,P, *des côtés opposés des deux quadrilatères seront en ligne droite ;* 3° *Chacun des systèmes de droites qui partent de* F, A, G, *forme un faisceau harmonique.*

Prenons A pour pôle : sa polaire sera FG (p. 13) ; les tangentes menées

en B et E se couperont sur FG ; de même, les tangentes menées en C, D. Donc, les points F, K, G, L, sont sur une droite, diagonale du quadrilatère circonscrit KMLN. De même, le point F étant pris pour pôle, on reconnaîtra que AG est sa polaire, et que les tangentes en B, C se coupent sur AG ainsi que les tangentes en E, D. Donc les intersections N, M, sont en ligne droite avec A, G, et cette droite est la seconde diagonale du quadrilatère circonscrit.

2° On cherchera la polaire du point G. Les transversales CE, BD, déterminent les deux systèmes de sécantes BE, CD et CB, DE dont chacun fournit un point de la polaire : ces points sont A, F (p. 13). Les tangentes en B, D, se coupent aussi sur cette polaire en O, de même que les tangentes en E, C, qui déterminent le point P. Donc les points F, O, A, P, intersections des côtés opposés des deux quadrilatères, sont en ligne droite.

3° Ces points F, G, A, considérés par rapport au quadrilatère BCDE sont évidemment (p. 6, r.) des sommets de faisceaux harmoniques.

PROPOSITION XV.

THÉORÈME. — FIG. 145.

La polaire d'un point quelconque d'une droite passe par le pôle de cette droite ; ou, si plusieurs points sont sur une droite, les polaires de ces points concourent en un même point, pôle de cette droite, et réciproquement.

Soit A un point d'une droite AB, tirez AO ; prenez $IO = \frac{OH^2}{OA}$, menez ID perpendiculairement à IO, ce sera la polaire du point A (p. 10). Or, pour avoir le pôle de AB, menez OC perpendiculaire à cette ligne, et je dis que le point D où OC coupe ID, est ce pôle. Car, à cause des $\triangle$ semblables, on a $OI:OC::OD:OA$, d'où $OI \times OA = OC \times OD =$ par suite $\overline{OH}^2$.

Donc D est ce pôle. On prouvera de même que la polaire de tout autre point de AB passe en D, etc.

Corollaire. Il suit de là que, si sur le plan d'un cercle on prend un système quelconque de droites et de points, qu'on cherche les pôles de ces droites, et les polaires des points, on aura deux figures corrélatives en ce sens que pour chaque système de points en ligne droite de la première, il y aura dans la seconde autant de droites qui concourent en un point, pôle de cette droite, et réciproquement. — Ces deux figures sont nommées *polaires réciproques*.

PROPOSITION XVI.

Théorème. — Fig. 146.

Dans tout hexagone inscrit ABCDEF, *les points de concours des côtés opposés sont sur une droite.* (Deux côtés opposés sont ici deux côtés séparés par deux autres.)

Prenant 3 côtés non consécutifs, AB, CD, EF, prolongez-les jusqu'à leurs rencontres en L,M,N. Dans le ▵ LMN, on a :

1° A cause de la transversale ED :

$$NG.\ LD.\ ME = LG.\ MD.\ NE$$

2° A cause de la transversale BC :

$$MH.\ NB.\ LC = NH.\ LB.\ MC.$$

3° A cause de AF :

$$LI.\ MF.\ NA = MI.\ NF.\ LA.$$

Multipliant ces égalités membre à membre, on pourra supprimer :

1° d'un côté LD. LC, de l'autre LA. LB, produits égaux à cause des sécantes LB, LD.

2° ME. MF et MC. MD, à cause des sécantes ME, MC ;

3° NA. NB et NE. NF, à cause de AB, FE ;

Il restera donc NG. MH. LI = LG. NH. MI.

Ce qui prouve que les points G, H, I, pris sur les prolongements des côtés du ▵ LMN sont en ligne droite (p. 1).

Remarque. Six points déterminent autant d'hexagones qu'il y a d'unites dans $\frac{5.4.3.2.}{2}=60$. A chacun de ces hexagones répond un système de 3 points en ligne droite ; mais ces systèmes ne comprennent en tout que 45 points. Car les côtés de tous les hexagones, c'est-à-dire les droites distinctes qui joignent six points 2 à 2, sont au nombre de $\frac{1}{2}.6.5=15$. De ces droites, il y en a toujours 6 qui sont les côtés d'un hexagone, et les 9 autres sont ses diagonales ; c'est donc parmi les intersections de ces 15 droites, prises 2 à 2, qu'il faut chercher les points de nos systèmes. Or, le nombre des intersections de 15 droites, 2 à 2, est $\frac{15.14}{2}=105$; mais chaque sommet A, B... étant le point de concours de 5 droites, représente déjà un nombre d'intersections égal à $\frac{5.4}{2}=10$; les 6 sommets contiennent donc 60 de ces intersections ; par suite il en reste $105-60=45$ pour former les 60 systèmes de 3 points.

Corollaire. 1° Si l'on suppose que la droite AF, prolongée indéfiniment, tourne autour du point A, jusqu'à ce que le point F se confonde avec A ,

elle deviendra tangente en A, et l'hexagone se changera (fig. 147) dans le pentagone ABCDE : le point I sera alors l'intersection de la tangente en A, avec le côté CD, *opposé* à A : donc *dans le pentagone inscrit, les points G et H, où deux côtés adjacents* AB, AE, *sont coupés par les côtés* ED, BC *respectivement opposés aux deux premiers, sont en ligne droite avec le point I où la tangente au point de concours* A *des deux mêmes premiers côtés rencontre le cinquième* CD.

Cela fait toujours 60 systèmes de 3 points en ligne droite. Car nos 5 sommets A, B, C, D, E, déterminent 12 pentagones, chacun desquels, avec la tangente en A, donne un système: total 12; mais la tangente, à chacun des autres sommets, en donne autant, ce qui fait 60 systèmes, comprenant ensemble 45 points.

2° Supposons que les points A, F soient réunis en un seul, de même que B, C (fig. 148); les côtés AF, BC seront des tangentes, et l'hexagone se réduit à un quadrilatère; le point I sera l'intersection de la tangente en A avec un côté opposé BD; de même H, sera l'intersection de la tangente en B avec un côté opposé AE, et G sera l'intersection des deux autres côtés opposés AB, ED. Donc, dans un quadrilatère inscrit, *l'intersection de deux côtés opposés* AB, DE *est en ligne droite avec les points où les tangentes, aux sommets d'un de ces côtés, rencontrent les deux autres côtés* FE, BD.

3° Si (fig. 149) les points B, C se réunissent, le côté BC deviendra tangent en B; si de même E, F se réunissent, le côté AF devient tangent en E; alors les côtés opposés AF, CD, déterminent le point I, les côtés opposés AB, ED, le point G, et les tangentes en C, F donnent le point H. Donc, dans le quadrilatère inscrit DEAB, les tangentes à deux sommets opposés se coupent sur la droite qui joint les intersections des côtés opposés, propriété déjà prouvée à la pr. 14. Car les tangentes en A et D se couperont aussi sur IG.

4° Supposons (fig. 150) enfin que les points se réunissent deux à deux, savoir B avec A, C avec D, F avec E; dans ce cas, l'hexagone se transforme en deux Δ, l'un inscrit ACE, l'autre circonscrit, ayant ses côtés tangents aux sommets du premier, et l'on conclut que dans ces deux Δ, les intersections G, H, I des côtés du premier, avec leurs opposés dans le second, sont en ligne droite.

Ces corollaires peuvent tous se démontrer directement.

PROPOSITION XVII.

Théorème. — Fig. 151.

Dans tout hexagone circonscrit ABCDEF, *les trois diagonales* AD, BE, CF, *qui joignent les sommets opposés* (ceux qui sont séparés par 2 autres), *concourent en un même point.*

Joignez les points de contact successifs *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f* pour former l'hexagone inscrit *abcdef*; prolongez les côtés opposés jusqu'à leurs points d'intersec-

tion G, H, I, qui seront en ligne droite (p. 16). Cherchez les polaires de ces 3 points; pour avoir celle du point H, on peut se servir de la sécante H*b*, mener les tangentes en *b*, *c*, où elle coupe la circonférence, et l'intersection C de ces tangentes sera un point de cette polaire; de même, à cause de H*f* et des tangentes *e*F, F*f*, le point F est un point de la même polaire qui se confond, par suite, avec la diagonale CF. On prouvera semblablement que la polaire de G est BE, que celle de I est AD; or, les points I, G, H sont sur une droite; donc leurs polaires concourent en un point O (p. 15).

Remarque. A chacun des hexagones inscrits déterminés par les six sommets *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, répond, comme on l'a prouvé à la pr. 16, un système de 3 points en ligne droite, et dont les polaires passent toutes trois par un point, ce qui donnerait 60 systèmes de 3 droites concourantes. Mais, de même que les côtés des hexagones inscrits ne fournissent que 45 points, de même ici il n'y aura que 45 droites, chacune de ces droites étant la polaire d'un des 45 points.

Corollaire. 1° Si (fig. 152) le point *b* se réunit avec *a*, B s'y réunira aussi, et la diagonale BE joindra le sommet E avec le point de contact du côté opposé. Donc, ***dans le pentagone circonscrit, les diagonales qui vont des extrémités d'un côté à celles des côtés adjacents, se coupent sur la droite qui joint le point de contact de ce côté et le sommet opposé.***

2° Je suppose de plus (fig. 153) que le point *c* se réunisse avec *d*, et par suite D aussi; il s'ensuit que, dans tout quadrilatère circonscrit, les droites AD, BE qui joignent deux sommets opposés A, E, avec les points de contact des côtés CE, CA adjacents à l'un des autres sommets C, se coupent sur la droite qui joint les deux autres sommets CF. — De même A*e*, E*f* se coupent sur CF.

3° Supposons (fig. 154) que *a*, *b*, B se réunissent d'un côté, *d*, *c*, E de l'autre, on conclura que BE, qui joint 2 points de contact opposés, passe à l'intersection des diagonales du quadrilatère circonscrit. De même *fc* y passe, ce qui ramène à la première partie de pr. 14.

Remarque 2. Les pr. 16, 17, avec leurs corollaires, ont leurs correspondantes dans les polygones de plus de six côtés.

Remarque 3. La pr. 17 est un exemple de l'emploi des polaires réciproques. Ces mêmes considérations fournissent des moyens de transformation pour une certaine classe de questions. C'est ainsi que, s'il s'agit de circonscrire (fig. 155) à un cercle donné un ▵ABC dont les sommets soient placés sur des droites données AA', BB', CC', la question pourra se transformer en une autre ayant pour objet d'inscrire un ▵ *abc*, dont les côtés passent par les points *a'*, *b'*, *c'*, pôles des droites données. Car *bc* est la polaire du point A, et contient par suite le pôle de AA'; de même *ac* contient le pôle de BB', *ab* renferme le pôle de CC'.

Nous remarquerons plus tard un second moyen de transformation : la similitude en est un cas particulier.

PROPOSITION XVIII.

Théorème. — Fig. 156 et 157.

Le lieu des points d'où peuvent être menées à deux cercles OB, O'B' *non concentriques des tangentes égales, est une droite perpendiculaire à la ligne des centres, qui se confond avec la corde commune dans le cas où les cercles se coupent, et avec la tangente au point commun, s'ils se touchent.*

Soient AB, AB' deux tangentes menées d'un même point A ; tirons les rayons de contact BO, B'O', les droites AO, AO', la ligne des centres OO', et la droite AC perpendiculaire à OO'.

Pour abréger, je représente le rayon OB par R, O'B' par R', la distance OO' par A, la distance OC par X ; O'C sera A—X, ou X—A, selon le cas ; mais le carré de ces expressions est le même.

Les $\triangle$ rectangles AOC, AO'C donnent

$$\overline{AO}^2=\overline{AC}^2+X^2,\qquad \overline{AO'}^2=\overline{AC}^2+(A-X)^2$$

Les $\triangle$ ABO, AB'O', donnent

$$\overline{AB}^2=\overline{AO}^2-R^2=\overline{AC}^2+X^2-R^2$$
$$\overline{AB'}^2=\overline{AO'}^2-R'^2=\overline{AC}^2+(A-X)^2-R'^2.$$

Ainsi $\overline{AB}^2$, $\overline{AB'}^2$ ont la partie $\overline{AC}^2$ commune, et pour que AB=AB', il faut et il suffit que

$$X^2-R^2=(A-X)^2-R'^2=A^2-2AX+X^2-R'^2$$

Supprimant X^2, et transposant, on a $X=\dfrac{A^2+R^2-R'^2}{2A}$.

Donc, pour que les tangentes AB, AB' soient égales, il faut et il suffit que l'on prenne OC égal à cette expression, qu'en C on élève une perpendiculaire indéfinie à la ligne des centres, et que le point A soit un point quelconque de cette perpendiculaire.

Si les deux cercles se coupent, la droite dont il est question se confond avec le prolongement de la corde commune ; s'ils se touchent, c'est la tangente au point commun. En effet, dans le 1er cas (fig. 158,) si d'un point quelconque B du prolongement de la corde commune AA', on mène les tangentes BC, BC', la tangente BC et la sécante BA' donnent $\overline{BC}^2$=BA'. BA. De même dans le second cercle $\overline{BC'}^2$=BA' BA. Donc BC=BC'. Même résultat pour tout autre point de AA' prolongé. Dans le second cas (fig. 159) BA, BC étant des tangentes menées au même cercle, on a BA=BC ; semblablement BA=BC'. Donc BC=BC'.

Remarque 1. Le point C ne peut pas tomber au delà du centre O du plus

grand cercle par rapport à celui du plus petit; car, en représentant OC' par X, on trouverait

$$X^2-R^2=A^2+2AX+X^2-R'^2$$

ou $$R'^2-R^2=A^2+2AX.$$

égalité impossible, vu que $R'<R$.

Remarque 2. Si les deux cercles O, O' (fig. 160) n'ont aucun point commun pour déterminer notre droite, on les coupe tous les deux par un même troisième cercle O", quelconque d'ailleurs; les cordes communes AB, CD se couperont en un point F. Les tangentes menées de F, point du prolongement de AB, aux cercles O, O" sont égales; les tangentes menées de F, point du prolongement de CD, aux cercles O', O", sont aussi égales. Donc du point F on peut mener aux cercles O, O' des tangentes égales. Ce point F suffit pour déterminer le lieu cherché FE.

DÉF. 7. La droite, lieu des points d'où l'on peut mener à deux cercles des tangentes égales, se nomme la *disomologue* des deux cercles. Cette dénomination dérive de la propriété suivante.

PROPOSITION XIX.

THÉORÈME. — FIG. 161.

Si deux cercles O, O', sont touchés de la même manière par un 3e cercle quelconque O", la disomologue des deux premiers cercles est, par rapport à chacun des points de contact, C, C' pris comme centre de similitude, homologue de la polaire du point S, centre de similitude directe des cercles touchés, polaire prise par rapport à celui de ces deux cercles qui est touché en C, C'. Si les deux premiers cercles sont touchés de différentes manières par le 3e, le centre de similitude directe de ceux-là est remplacé par celui de similitude inverse.

Il est prouvé (p. 3) que les points de contact C, C' sont en ligne droite avec le centre de similitude S. Cette droite SC coupe le cercle O en deux points C, D, et les tangentes en ces points déterminent un point A de la polaire du point S par rapport à O (p. 11). Dans les cercles O, O", le point C étant un centre de similitude, les points D, C' sont homologues; donc les rayons OD, O"C' sont parallèles, et les tangentes DA, C'E le sont. De plus, ces droites, menées par les points homologues D, C', seront homologues; par suite, les points A, E, où elles sont coupées par le rayon vecteur A E, sont homologues; mais, si d'un côté A est sur la polaire de S, E appartient à la disomologue de O, O', vu que les tangentes EC, EC', menées de E au cercle O" sont égales. D'ailleurs, cette polaire AB, et cette disomologue sont parallèles comme perpendiculaires à OO'. Donc elles sont homologues par rapport à C.

On prouvera de même que A'B', polaire du point S dans le cercle O', est homologue de EF par rapport au point C', et EF est deux fois homologue. De là son nom.

Dans le second cas, même raisonnement.

PROPOSITION XX.

Théorème. — Fig. 162, 163, 164 et 165.

Les disomologues de 3 cercles concourent en un point, si les centres ne sont pas en ligne droite.

Soit AB la disomologue de O, O'; CB celle de O', O"; je dis que leur intersection B se trouve ou dans l'intérienr des trois cercles, ou à la fois hors des trois, ou snr les trois circonférences à la fois. En effct (fig. 162, 163), si ce point B est hors de l'un O, c'est que de ce point B on peut mener des tangentes égales aux cercles O, O", ainsi qu'aux cercles O', O", vn que ce point est à la fois sur les disomologues des deux premiers, et sur celle des deux derniers. Donc ce point est hors des trois cercles, s'il est au dehors de l'un. Donc s'il est dans l'un il est dans les trois.

Pour les fig. 162, 163, le point B, intersection des disomologues de O, O' et de O, O", est tel, que de ce point, comme nous venons de le rappeler, on peut mener des tangentes égales aux 3 cercles; donc aussi aux cercles O', O"; par suite il est sur la disomologue de ces deux derniers qui passe par conséquent en B. Donc les 3 disomologues concourent en un point.

Pour la fig. 164, soit G l'intersection des disomologues AB, EF; je dis que DG est la 3e disomologue, c'est-à-dire que DG passe au point C. Car, supposons que DG coupe le cercle O", par exemple en C', et le cercle O en C"; à cause des cordes DC", AB, dans le cercle O, on aura

$$DG.\ GC''=AG.\ GB;$$

DC' et EF dans le cercle O", donnent DG. GC'=EG. GF.

Enfin, AB, EF, dans le cercle O, donnent AG. GB=EG. GF.

Cette égalité, comparée aux précédentes, donnera DG. GC"=DG. GC'; d'où GC" = GC'. Donc la droite DG doit couper O et O" en un même point, savoir en C, et DC passe par G.

PROPOSITION XXI.

Théorème. — Fig. 166.

Quand 3 cercles sont touchés par un 4e, le point d'intersection des disomologues des 3 premiers, le point de contact du 4e avec l'un quelconque de ces 3 premiers, et le pôle de leur axe de similitude dans ce même dernier cercle, sont en ligne droite. Si le 4e cercle touche les 3 premiers de la même manière, c'est l'axe de similitude directe dont il s'agit; s'il les touche de manières différentes, ce sera l'axe de similitude inverse qui passe par le centre de similitude directe des deux cercles touchés de la même manière.

Soient O, O', O" les 3 cercles donnés, X un 4e qui les touche extérieure-

ment en E, E' E"; SS" l'axe de similitnde directe des trois premiers, I l'intersection de leurs disomologues, ID' la disomologue de O, O"; ID" celle de O, O'

Soit AB la polaire de S" dans le cercle O, *ab* celle de S', lenr intersection C sera le pôle de S' S" dans le même cercle : car le pôle d'une droite est le point de concours des polaires de tous les points de cette droite (p. 15). Mais les cercles O, O' étant touchés de la même manière par X, leur disomologue ID" est, par rapport au point dc contact E, homologue de AB, polaire de leur centre de similitude directe S" dans le cercle O' (p. 19). De même ID', disomologue des cercles O, O" est, par rapport à E, homologue de *ab*, polaire de S'. Donc I, intersection des disomologues ID', ID", est, par rapport au point E, homologue de C, intersection des polaires AB, *ab*, c'est-à-dire pôle de S' S"; par suite ces points I, C, sont en ligne droite avec le point E. De même, si C', C" sont les pôles de l'axe de similitude directe SS" dans les cercles O', O", on prouvera que les points I, E', C' sont en ligne droite, ainsi que I, E" C". — Enfin, le cas où le 4e cercle touche les 3 premiers de différentes manières, se déduit de raisonnements analogues.

Remarque. — Quelques autres relations de position ont encore lieu ici : les principales sont les snivantes, que je me contenterai d'énoncer:

1° L'intersection des disomologues des 3 cercles touchés est un centre de similitude des deux cercles qui les touchent extérieurement, ou intérieurement tous les trois, de même que de deux cercles quelconques touchant deux des cercles proposés extérieurement ou intérieurement et le 3e autrement, de sorte que les 8 cercles tangents se distribuent en 4 couples, ayant chacun un de ses deux centres de similitude en ce point d'intersection.

2° Les qnatre axes de similitnde sont les disomologues respectives de ces 4 couples de cercles tangents.

PROPOSITION XXII.

Problème. — Fig. 166.

Mener un cercle tangent à 3 cercles donnés O, O' O".

Ce problème offre huit solutions : il y a un cercle qui touche les 3 cercles donnés extérieurement, un second qui les embrasse : ce sont les deux cercles qui touchent O, O', O" de la même manière. Il y en a un 3e qui touche O extérieurement et embrasse O', O"; le 4e embrasse O, et touche O', O", extérieurement; deux autres sont par rapport à O', et les deux derniers par rapport à O", ce que le 3e et le 4e sont relativement à O Ces 8 solutions peuvent se réduire à nn moindre nombre; le problème est impossible si O, O', O" sont concentriques, etc.

Pour tronver les cercles tangents, cherchez l'intersection des disomologues de O, O', O", et leurs 4 axes de similitude : prenez les pôles de ces

axes dans les trois cercles, et joignez ces 12 pôles au point d'intersection des disomologues; la droite qui joint ce dernier point à un pôle relatif à un cercle, coupe ce cercle en deux points : total 24 points, qui sont les points de contact des 8 cercles inconnus avec les 3 cercles donnés. La pr. 21 rend raison de cette construction, ainsi que de la manière dont il faut accoupler ces 24 points relativement à chaque cercle tangent.

Remarque 1. La construction précédente s'applique au cas où l'un des deux cercles donnés est remplacé par un point, qu'il suffit alors de considérer comme un cercle d'un rayon nul : ce point, comparé à l'un des cercles donnés, est à la fois centre de similitude inverse et directe. De même avec l'autre cercle. La disomologue d'un point et d'un cercle peut être déterminée si l'on considère que, d'après l'expression de X (p. 18), la disomologue ne change pas lorsque les carrés des rayons augmentent ou diminuent de la même quantité.

La même construction s'applique encore au cas où deux cercles O′, O″ sont remplacés par des points. La disomologue de deux points n'est autre que la perpendiculaire menée au milieu de la droite qui joint ces deux points. Du reste, ce dernier problème se résout de plusieurs autres manières, dont on va indiquer la plus simple.

Soit O le cercle donné, O′, O″ étant les deux points donnés; par ces deux points faites passer un cercle qui coupe le cercle proposé en 2 points A, B; tirez AB, et O′ O″ qui se couperont en un point C. De ce point C menez les tangentes CD, CD′ : les cercles qui passent l'un par D, O′, O″, l'autre par D′, O′, O″, sont les cercles cherchés, ce qu'on peut prouver, soit par le moyen de la pr. 27, l. 3, soit par la considération des disomologues.

A ce problème peut se ramener celui où il s'agit de faire passer (fig. 168) par un point O″ un cercle tangent à deux autres. Soit S le centre de similitude directe de O, O′; A, B les points de contact du cercle cherché; la droite AB passe en S : joignez SO″, et soit C le point inconnu où cette droite coupe le cercle cherché. On a SC. SO″=SA. SB. Mais par rapport à un rayon vecteur quelconque SA′, on a SA′. SB′=SA. SB. Car si l'on prolonge SA, SA′, jusqu'en D, D′, les droites homologues BB′, DD′ seront parallèles, $\wedge$ AA′S = ADD′ = par suite B′BS, de sorte que les $\triangle$ SBB′, SAA′, SDD′ sont semblables, d'où l'égalité ci-dessus. On a donc aussi

SC. SO″=SA′. SB′.

Ainsi, après avoir tiré un rayon vecteur quelconque SD′, par les points A′, B′, non homologues, et par O″, faites passer un cercle qui coupera SO″ en un point C; ce point appartiendra au cercle tangent. Il suffira donc de mener par C et O″ un cercle tangent à O ou à O′. D'ailleurs, le cercle auxiliaire CO″B′A′, servira immédiatement à déterminer les points de contact comme ABO″O′ fig. 167. Outre les deux cercles tangents que l'on trouvera ainsi, il y en a deux autres que l'on construira en employant au lieu de S le centre de similitude inverse.

Remarque 2. La construction de pr. 22 est en défaut si les centres des

cercles O, O', O" sont en ligne droite : car, dans ce cas, les disomologues sont parallèles et les axes de similitude se confondent avec la ligne des centres, de sorte que les pôles de ces axes n'existent plus. Or, ce qu'on vient de dire à la fin de la remarque précédente conduit à une autre solution de pr. 22, solution toujours possible. S'il s'agit par exemple de déterminer le cercle qui touche les 3 cercles donnés extérieurement, on diminuera chacun des trois rayons donnés R, R', R" d'une quantité égale au plus petit, que je suppose R", ce qui donne un point O", et deux cercles de rayons R — R", R'—R". Or, le cercle qui, passant par O", touchera les cercles auxiliaires R—R", R' — R" extérieurement, aura même centre que celui qui touche extérieurement les 3 cercles donnés O, O', O". Les centres des 7 autres cercles tangents se trouveront d'une manière analogue.

Remarque 3. Si au lieu d'un des cercles O, O', O", on donne une droite, on peut considérer que d'après la pr. 18, toutes les fois que l'un des 2 cercles dont on cherche la disomologue, se change en une droite, cette droite est elle-même la disomologue. Quant aux centres de similitude de la droite et du cercle comparés, ce sont les points où la circonférence est coupée par une droite menée de son centre perpendiculaire à la droite donnée. Au moyen de ces transformations, on peut appliquer la construction de pr. 22, au cas où un des cercles donnés est remplacé par une droite, etc.

Voici encore la construction du cercle tangent à une droite AB (fig. 169), et à un cercle O donnés, et passant par un point donné O'.

Menez du point O une droite OC perpendiculaire à AB, afin de déterminer sur la circonférence O les points S, S'; du point S, menez une transversale quelconque SB (on peut prendre SC); par les points D, B, où elle coupe O et AB, et par le point O' faites passer une circonférence qui coupera en un point E la droite SO' : le point E appartiendra au cercle tangent. Ainsi, par les points E, O', on mènera un cercle tangent à O, et pour cela on tire la corde D D' coupant O'S en F ; les tangentes FG, FG' déterminent deux points G, G', dont chacun combiné à son tour avec O' et E, fournira un cercle tangent. Le point H où le premier touche AB se trouve sur SG.

Si dans cette construction on remplace S par S', on trouvera deux nouvelles solutions : total 4.

LIVRE IV.

LES FIGURES PLANES.

LES SURFACES COMPARÉES

PAR L'INTERMÉDIAIRE DES LONGUEURS.

Les polygones comparés au carré, pr. 1—6.
Le cercle comparé au carré, pr. 7.
Comparaison des figures semblables, pr. 8.
Comparaison de figures diverses, ou transformation des aires, pr. 9—15.

Fig. 170. Un ▱ peut se diviser en parties égales, par des droites parallèles à un côté. C'est ainsi que ABCD est divisé en sept parties égales, par des droites parallèles au côté AD. En répétant l'une de ces parties trois fois, on aurait donc les $\frac{3}{7}$ de la figure ABCD. Par conséquent un ▱ peut être multiplié par un nombre commensurable quelconque.

On peut aussi concevoir le produit d'un ▱ par un nombre incommensurable, par exemple par $\sqrt{2}$. (*Consultez mon Arithmétique.*)

Cela posé, le rapport de deux ▱ est un nombre abstrait tel, que le produit du second ▱ par ce nombre est égal

au premier. On doit supposer, dans ce qui vient d'être dit, que les ▱ que l'on compare ont les angles égaux chacun à chacun ; mais il n'est pas nécessaire de leur supposer un côté commun, comme on a fait en prenant les $\frac{3}{7}$ du ▱ ABCD. Car si l'on partage AD en 4 parties égales, et que, par les points de division, on mène des parallèles à AB, le ▱ ALMN sera tout aussi bien les $\frac{3}{7}$ de ABCD que AIKD, puisque AIKD et ALMN ont la partie commune AION, et les parties excédantes IOML d'un côté, DNOK de l'autre, sont composées elles-mêmes d'un même nombre de petits ▱ égaux.

Déf. 1. Deux figures planes sont dites *équivalentes*, lorsqu'elles ont des surfaces égales, quoique non superposables. Les ▱ AIKD, ALMN sont donc équivalents.

Déf. 2. Le rapport des surfaces de deux figures est un nombre abstrait tel, que le produit de la seconde figure par ce nombre donne une figure égale ou équivalente à la première. Nous indiquerons le rapport de deux surfaces A, B par les notations connues A : B et $\frac{A}{B}$.

Lors donc que nous dirons, par exemple, une surface A est à une surface B :: 3 : 7, il faut entendre que A vaut les $\frac{3}{7}$ de B, c'est-à-dire que si A est divisée en 3 parties égales, B équivaut à la somme de 7 de ces parties; et réciproquement, si A vaut les $\frac{3}{7}$ de B, on écrira $A=\frac{3}{7}B$, ou $\frac{A}{B}=\frac{3}{7}$, ou A : B :: 3 : 7.

Pour appuyer cette définition, remarquez qu'on peut toujours concevoir un ▱ qui, ayant un angle donné, soit équivalent à une figure donnée. Car si dans un ▱ on conserve un côté et les angles, et qu'on fasse varier le côté adjoint d'une manière continue, le ▱ variera d'une manière continue depuis zéro jusqu'à l'infini. Il passera donc par

tous les états de grandeur qu'une surface plane peut prendre; par conséquent, il prendra successivement des valeurs équivalentes à toutes les figures planes imaginables. Ainsi deux figures étant données, on peut les supposer remplacées par deux ▱ respectivement équivalents, ayant un angle commun. Or, il a été montré comment on multiplie un ▱ par un nombre abstrait; on concevra donc aussi le rapport de deux surfaces planes quelconques.

Déf. 3. La mesure d'une surface se nomme *aire*. Le sens du mot *mesure* est défini, I. 3.

Déf. 4. Fig. 171 et 172.—La *hauteur* d'un Δ ABC est la perpendiculaire AD, menée du sommet A d'un des ∧ sur le côté opposé BC, prolongé s'il le faut. Ce point A s'appelle le *sommet* du Δ, et le côté BC, sur lequel tombe la perpendiculaire, se nomme la *base*. On peut prendre pour base tel côté qu'on veut; le sommet sera celui de l'angle opposé à ce côté.

Dans un Δ isocèle, on prend ordinairement pour base le côté qui n'est pas égal aux autres.

Déf. 5. Fig. 173. — La *hauteur* d'un ▱ est la perpendiculaire AE, menée entre deux côtés opposés pris pour *bases*.

Déf. 6. Fig. 174. — La *hauteur* du trapèze est la perpendiculaire EF menée entre les bases.

PROPOSITION I.

Théorème. — Fig. 170.

Les surfaces de deux ▱ ABCD, EFGH équiangles entre eux, sont entre elles comme les produits des côtés adjacents, de sorte qu'on a

ABCD : EFGH :: AB × AD : EF × EH.

Supposons que les côtés AB, EF soient entre eux :: 7 : 5

et que AD:EH::4:3. Divisez AB en 7 parties égales, EF en contiendra 5; par les points de division menez des droites respectivement parallèles aux côtés AD, EH; ces droites décomposeront la première figure en 7 parties égales, et la seconde en 5 parties égales entre elles, mais non égales à celles de la première. Divisez de même AD en 4 parties égales, EH en contiendra 3. Si, par les points de division, de AD on mène des parallèles au côté AB, chacune des 7 parties de ABCD se trouvera divisée en 4 ▱ égaux, de sorte que ABCD se trouvera décomposé en 7×4 parties égales. Opérant de même sur EFGH, on décomposera cette figure en 5×3 parties égales à celles de ABCD; donc (d. 2)

(1) ABCD:EFGH::7×4:3×5.

Mais on a

AB:EF::7:5

AD:EH::4:3;

multipliant par ordre

AB×AD:EF×EH::7.4:5.3,

cette proportion a un rapport commun avec (1); donc

ABCD:EFGH::AB×AD:EF×EH.

Si AB, EF étant commensurables, AD, EH ne le sont pas, dans la rem. 4, p. 3, l. 3, supposez que A, B représentent les deux ▱; α, β les côtés AB, EF, a, b les côtés AD, EH, et vous conclurez que notre proportion a lieu dans ce cas. On passera de même au cas où AB, EF sont incommensurables, ainsi que AD, EH, on supposera alors AD=α, EH=β AB=a, EF=b.

Corollaire 1. Tirez les diagonales DB, HF; chacun des deux ▱ se trouvera décomposé en deux Δ égaux. *Ces deux* Δ ADB, HEF, *qui ont un angle égal* (A=E), *sont donc entre eux* comme les ▱, ou ::AD×AB:EH×EF, c'est-à-dire *comme les produits des côtés qui comprennent l'angle égal.*

PROPOSITION II.

Théorème.

L'aire d'un rectangle rapportée à un carré pris pour unité, est égale au produit de la base par la hauteur, rapportées au côté de ce carré.

Soient deux rectangles, que nous nommerons R, r; soient B, b leurs bases, H, h leurs hauteurs, qui, dans ce cas, sont les côtés adjacents aux bases. Puisque dans les rectangles les angles sont égaux comme droits, on aura $R:r::B\times H:b\times h$ (p. 1), proportion qui peut se mettre sous la forme

$$\frac{R}{r}=\frac{B\times H}{b\times h}=\frac{B}{b}\times\frac{H}{h}.$$

Supposons maintenant que r soit un carré, de sorte que $h=b$, la proportion devient

$$\frac{R}{r}=\frac{B}{b}\times\frac{H}{b}.$$

Si l'on prend r pour unité de surface, $\frac{R}{r}$ est la *mesure* de la surface du rectangle R (d. 3); si, de plus, on prend b pour unité de longueur, $\frac{B}{b}$, $\frac{H}{b}$ sont les *mesures* des côtés B, H du rectangle; donc, effectivement si l'on sous-entend que l'unité de surface est un carré, et que l'unité de longueur est le côté de ce carré, la mesure de la surface d'un rectangle, ou l'aire d'un rectangle, est égale au produit de la base par la hauteur.

Remarque 1. Représentant les trois rapports $\frac{R}{r}$, $\frac{B}{b}$, $\frac{H}{b}$ par R′, B′, H′, on peut écrire :

$$R'=B'\times H'.$$

Ainsi, pour mesurer la surface d'un rectangle en mètres carrés, mesurez les côtés en mètres, et multipliez ces mesures l'une par l'autre, le produit sera l'aire du rectangle. B′, H′ sont ici deux *nombres abstraits*, dont le produit est égal au *nombre abstrait* R′, rapport du rectangle au carré.

Exemple. On demande l'aire du rectangle qui a pour base $3^{m}, 126$ *et pour hauteur* $1^{m}, 14$.

Cette aire $=3,126\times 1,14=3,56364$; comme on a pris pour unité de longueur, le mètre, l'unité de surface est le mètre carré que nous désignons par m^2. La partie décimale peut s'énoncer en décimètres carrés, centimètres carrés, etc. Pour faire voir comment on l'énonce, remarquons que pour mesurer un mètre carré en décimètres carrés, il faut mesurer la base et la hauteur en décimètres, et multiplier entre elles les deux mesures ; or, la base et la hauteur seront égales chacune à 10, et leur produit sera 100. Donc le mètre carré contient 100 décimètres carrés. De même, le décimètre carré contient 100 centimètres carrés, le centimètre carré contient 100 millimètres carrés, et ainsi de suite. Par conséquent

$1^{m^2}=100$ décimètres carrés $=10000$ centimètres carrés $=1000000$ millimètres carrés. Donc le décimètre carré est $\frac{1}{100}$ du mètre carré, le centimètre carré est $\frac{1}{10000}$ du mètre carré, etc. Le nombre $3^{m^2},56364$ contient donc

3 mètres carrés, 56 décimètres carrés,
36 centimètres carrés, 40 millimètres carrés.

Remarque 2. Dans tout le reste de cet ouvrage, l'unité de surface sera le carré construit sur l'unité de longueur.

Remarque 3. L'aire d'un carré rapporté à un autre carré, sera donc le carré arithmétique du côté du premier rapporté à celui du second. Ainsi dans toutes les propositions du 3ᵉ livre, le carré d'une ligne peut être regardé comme l'aire du carré qui a cette ligne comme côté, et le produit de deux lignes peut être interprété comme représentant l'aire

du rectangle, ayant pour base l'une de ces lignes et pour hauteur l'autre. C'est ainsi que les pr. 24, 25, l. 3, prouvent :

1° Que (fig. 175) le carré ABFE fait sur un côté AB de l'angle droit d'un Δ rectangle ABC est équivalent au rectangle BDLI fait sur BI=BC, et BD projection de AB sur BC. De même ACKG carré fait sur AC est équivalent au rectangle DCHL fait sur DC et sur CH=CB. Car on a prouvé que

$$\overline{AB}^2 = BC \times BD, \qquad \overline{AC}^2 = BC \times CD.$$

2° Que le carré BCHI fait sur l'hypothénuse est égal à la somme des carrés AF, AK faits sur les deux autres côtés.

Cette dernière propriété peut être prouvée par la comparaison immédiate des surfaces de ces carrés.

Soit (fig. 176) ABC le Δ, rectangle en A. Sur AC, supposé > AB, construisez le carré ACDE hors du Δ, et sur AB, le carré ABGF couvrant en partie le Δ. Menez CH perpendiculaire à BC jusqu'à DE en H. Les ∧ HCD, ACB, tous les deux aigus, sont égaux comme ayant les côtés respectivement perpendiculaires; CD = CA, et les ∧ en D et A sont droits; donc Δ CHD=ABC, et DH=AB, CH=CB. Ainsi, sur BC et CH on peut faire un carré BCHI. Il faut prouver que ce carré est équivalent à l'hexagone BGFCDE, somme des carrés faits sur AB et AC. Or ces deux figures ont de commun la partie BLFCHK; il reste, quant au carré BCHI, les Δ IBK, LCF, et quant à l'hexagone, les 3 Δ BGL, CHD, KEH. Mais on a montré que DH=AB=AF; donc FC=EH; de là et des ∧, droits en F, E, égaux en H, C à cause des parallèles, on conclut que Δ LFC=KEH.

Enfin, si de I on mène IM perpendiculairement à BE, on prouvera 1° que Δ BIM=CHD, vu que BI=CH, et que les ∧ homologues sont égaux; 2° que Δ IMK = BGL. Car IM=HD=AB=BG, et les ∧ homologues sont aussi égaux.

Par suite le carré et l'hexagone sont décomposés en parties respectivement superposables. Donc, etc.

PROPOSITION III.

THÉORÈME — FIG. 177.

L'aire d'un ▱ est égale au produit de sa base par sa hauteur.

Pour le démontrer, je dis d'abord que deux ▱ ABCD, A'B'C'D' de même hauteur et de bases égales sont équivalents.

Soient AB, A'B' les bases égales ; placez-les sur une droite ; la hauteur étant la même, les deux autres bases CD, C'D' seront sur une parallèle à AB'. Cela posé, comme AB=A'B' =CD=C'D', les deux trapèzes AA'D'D, BB'C'C seront égaux, vu que les droites AB, A'B', etc., qui joignent les sommets de l'un à ceux de l'autre, sont égales et parallèles. Si donc de la figure totale AB'C'D on retranche successivement ces deux trapèzes, les restes ABCD, A'B'C'D' seront équivalents.

Cela posé, si A'B'C'D' est un rectangle, son aire=A'B' ×B'C'. Donc aussi l'aire ABCD= AB×C'B'.

Corollaire. Deux ▱ de même base sont entre eux comme leurs hauteurs, et deux ▱ de même hauteur sont entre eux comme leurs bases. En effet, soient P, p les aires de deux ▱, B, b les bases, H, h les hauteurs. D'après ce qu'on vient de prouver, on a $P=B\times H$, $p=b\times h$, et par conséquent

$$P:p::B\times H:b\times h.$$

Or, si l'on suppose les bases égales, B devient égal à b, et la proportion se réduit à $P:p::H:h$, etc.

PROPOSITION IV.

THÉORÈME. — FIG. 173.

L'aire d'un Δ ABC *est égale à la moitié du produit de la base par la hauteur.*

D'un sommet A menez une droite AD égale et parallèle au côté opposé BC ; joignez CD. La figure ABCD sera un ▱

(l. 1, p. 26), que la diagonale AC divise en deux Δ égaux. Ainsi le Δ ABC est la moitié de ce ▱; or, si AE est la perpendiculaire menée du point A sur BC, l'aire du ▱ a pour mesure (p. 3) BC × AE; donc le triangle a pour mesure $\frac{1}{2}$ BC × AE.

Remarque. L'aire d'un Δ ABC ne change pas si l'on transporte le sommet A en un point quelconque de la droite indéfinie AD, parallèle à la base BC.

Corollaire 1. Deux Δ de même base sont entre eux comme leurs hauteurs, et deux Δ de même hauteur sont entre eux comme leurs bases, puisque chaque Δ est la moitié d'un ▱ de même base et de même hauteur.

Corollaire 2. Tout polygone pouvant se décomposer en Δ, on saura calculer la surface d'un polygone quelconque, au moyen des mesures de certaines droites.

PROPOSITION V.

Théorème. — Fig. 174.

L'aire d'un trapèze est égale à la hauteur EF, *multipliée par la demi-somme des bases parallèles* AB, CD, *ou par la la droite* GH, *qui joint les milieux des côtés non parallèles.*

Tirez une diagonale BD; le Δ DBC aura pour mesure sa base DC, multipliée par la moitié de sa hauteur; or sa hauteur est égale à EF, et par suite sa mesure $\frac{1}{2}$ DC × EF.

Si dans le Δ ABD on prend AB pour base, la hauteur est aussi égale à FE (d. 4), et ce Δ a pour mesure $\frac{1}{2}$ AB × EF. Donc la somme des 2 Δ DBC, ADB, c'est-à-dire le trapèze ABCD, a pour mesure $\frac{1}{2}$ CD × EF + $\frac{1}{2}$ AB × EF ou $\frac{1}{2}$ (AB + CD). EF.

En second lieu, si du point G, milieu de AD, on mène GH parallèle à AB et par suite à DC, ces parallèles GH, AB, qui interceptent sur AD des parties égales, feront de même (l. 3, p. 4) sur BD et BC, de sorte que I est le milieu de BD, H celui de BC. D'ailleurs si de I on mène une parallèle à BC jusqu'à DC en K, ce point K sera aussi le milieu de DC : Ainsi $IH = CK = \frac{1}{2}$ DC. De même $GI = \frac{1}{2}$ AB. Donc GI+IH ou GH, est la moitié de la somme des bases AB+CD, et le trapèze aura pour mesure $GH \times EF$.

PROPOSITION VI.

THÉORÈME. — FIG. 178.

L'aire d'un polygone régulier est égale à son contour multiplié par la moitié de l'apothème.

Soit ABCDEF, un polygone régulier, O son centre, OG son apothème. Tirons les rayons AO, BO, etc., qui décomposeront le polygone en Δ égaux entre eux. Le Δ AOB a pour mesure $\frac{1}{2} GO \times AB$, et comme le polygone se compose de six Δ égaux à AOB, il aura pour mesure $\frac{1}{2} GO \times 6AB$ ou la moitié de l'apothème mutipliée par le contour 6AB. On raisonnera de même dans tout autre cas.

DÉF. 7. Un *secteur circulaire* (fig. 179) est une surface AOD comprise entre 2 rayons AO, DO d'un cercle, et l'arc AD intercepté.

DÉF. 8. Un *secteur polygonal* régulier est la surface comprise entre une ligne brisée régulière et les rayons menés à ses extrémités.

PROPOSITION VII.

THÉORÈME. — FIG. 179.

L'aire du secteur de cercle est égale à son arc multiplié par la moitié du rayon, et l'aire du cercle est égale à la circonférence multipliée par la moitié du même rayon.

Soit OABCD le secteur ; circonscrivez à son arc une ligne brisée régulière *abcd*, à côtés infiniment petits. Cette ligne diffère infiniment peu de l'arc. D'ailleurs l'aire comprise entre l'arc AB, la tangente *ab*, et les lignes A*a*, B*b*, est moindre que le rectangle qui aurait pour côtés *ab*, A*a*, de sorte que la différence entre le secteur circulaire et l'aire polygonale est moindre que $abcd \times Aa$; elle est donc infiniment petite. Donc dans toute relation de forme entière, la ligne brisée et le secteur polygonal peuvent être remplacés par l'arc et le secteur circulaire. (Voy. *Arithm.*, l. 3.)

Mais $$\textit{Aire } Oabcd = abcd \times \frac{1}{2} Oe.$$

Donc $$\textit{secteur } OABCD = \textit{arc } ABCD \times \frac{1}{2} Oe.$$

Même raisonnement pour le cercle entier; de sorte que

$$\textit{Cercle } OA = \textit{circ. } OA \times \frac{1}{2} OA.$$

Remarque. Soit r le rayon d'un cercle ; sa circonférence sera $2\pi r$ (l. 3, p. 31, r. 3) et sa surface $2\pi r \times \frac{1}{2} r$ ou πr^2.

Soit a l'angle AOD ; on a

$$a : 4 \textit{ droits} :: \textit{arc } ACD : \textit{circ. } AO, \text{ ou } : 2\pi r, \text{ d'où}$$

$$\textit{arc } ACD = \frac{2\pi r a}{4 \textit{ droits}}, \text{ et } \textit{secteur} = \frac{2\pi r a}{4d} \times \frac{1}{2} r = \frac{\pi r^2 a}{4d}.$$

Voici quelques applications numériques de ce qui précède.

1° *Calculer l'aire d'un secteur de cercle dont l'angle est de $48°+54'$, le rayon du cercle étant de 1 mètre, 6.* On a ici $a=48+54'$ et $r=1,6$. On réduit les degrés en minutes, et l'on a $a=\frac{2934}{60}=\frac{489}{10}=48,9$; prenant $\pi=3,14159$, nous aurons

$$sect.=\frac{48,9\times3,14159\times(1,6)^2}{360}=\frac{48,9\times3,14159\times2,56}{360}.$$

On peut simplifier en divisant 48,9 par 3, puis 2,56 par 4 et 360 par 12; ainsi

$$secteur=\frac{3,14159\times16,3\times0,64}{30}.$$

Opérations faites, on a, 1° : $16,3\times0,64=10,432$; 2° : $10,432\times3,14159=32,77306688$, divisant par 10 puis par 3, on a pour résultat 1,092435562, nombre que, pour abréger, je nommerai k; reste à savoir quels sont les *bons* chiffres. Or, le produit 10,432 est exact; mais 3,14159 est approché en moins à 0,00001 près; le produit de ces deux nombres est donc trop petit, et l'erreur est moindre que $10,432\times0,00001$, de sorte que le quotient par 30, *pris exactement*, serait en erreur de moins que $\frac{1}{30}\times 10,43\times0,00001$, ou que $\frac{1}{3}\times0,00001043$, qui est $<$ 0,000003477... En prenant ci-dessus le quotient k, on a négligé $\frac{2}{3}$ de l'unité décimale du 9e ordre; par conséquent, l'erreur sur le résultat k est moindre que 0,000003478. Ainsi, en ajoutant ce nombre à k, on a un résultat trop grand, qui est 1,092439040. On peut donc affirmer que le secteur est plus grand que 1,09243, et plus petit que 1,09244, et, à moins de 0,00001 près, le secteur est $1^{m^2},09243$, en moins; ce qui fait 1 mètre carré, 9 décimètres carrés, 24 centimètres carrés, 30 millimètres carrés.

2° *On veut avoir à moins d'un millimètre carré la surface d'un cercle dont le rayon est de* $1^m, 2$; *avec combien de décimales faut-il faire entrer* π *dans ce calcul?*

Représentons par p et $p+\alpha$ deux nombres qui comprennent entre eux la valeur rigoureuse de π. L'aire du cercle sera comprise entre $(p+\alpha)(1,2)^2$ et $p(1,2)^2$. Pour qu'elle diffère de chacune de ces expressions d'une quantité moindre qu'un millimètre carré, il suffit que la différence de ces deux mêmes expressions soit moindre qu'un millimètre carré; or, cette différence est

$$\alpha \times (1,2)^2 \text{ qu'on posera } < 0{,}000001,$$

d'où
$$\alpha < \frac{0{,}000001}{1{,}44},$$

ou
$$\alpha < \frac{1}{1440000}.$$

Ainsi, il suffit que la valeur de π soit approchée à moins de $\frac{1}{1440000}$ ou à moins de 0,0000001, et l'on aura la surface avec l'approximation demandée. Elle est 4,523893344. Cette valeur contient 9 décimales, et n'est exacte qu'à moins d'une unité du 6° ordre; cependant si nous supprimions les trois derniers chiffres, nous ne pourrions plus affirmer que l'erreur est encore moindre que l'unité du 6° ordre. Pour savoir si cela est, on peut tenter un premier essai qui consiste à calculer une limite de l'erreur, limite aussi approchée qu'on pourra. Or, on a pris π avec 7 décimales et en moins; la partie négligée dans π est plus petite que 0,00000006; l'erreur sur l'aire est donc moindre que

$$0{,}00000006 \times 1{,}44 = 0{,}0000000864.$$

Ainsi, l'erreur est moindre que 864 unités du 10° ordre, de sorte que si l'on supprime les chiffres 344, la limite de l'erreur sera de 344 unités du 9° ordre + 864 du dixième, ou 3440 + 864 = 4304 du dixième, ce qui est moins que l'unité du sixième. Donc au 6° ordre près, et en moins, la

surface du cercle est $4^{m^2},523893$, quantité par conséquent trop petite, mais qui deviendrait trop grande si on l'augmentait d'une unité du 6e ordre décimal.

L'essai ci-dessus ne résout pas toujours la question. Lorsqu'il la laisse indécise, il faut pousser l'approximation plus loin.

3° *L'aire d'un cercle est* a ; *on demande d'en calculer le rayon* r *à moins de* i *près.*

La question est de reconnaître comment il faut prendre π, pour obtenir ce degré d'approximation.

Or, on a $$\pi r^2 = a, \text{ d'où } r^2 = \frac{a}{\pi}. \qquad (1)$$

Soient p, $p+\alpha$ deux valeurs approchées de π, telles que $\pi > p$ et $\pi < p+\alpha$.

On a $$r^2 < \frac{a}{p} \quad r^2 > \frac{a}{p+\alpha}. \qquad (2)$$

Ces quotients ne pourront pas généralement se calculer exactement. Soient q, $q-\beta$ les valeurs approchées du 1er, en plus et en moins, q', $q'+\beta'$ celles du second, en moins et en plus, de sorte que

$$\frac{a}{p} < q \qquad \frac{a}{p} > q-\beta \qquad (3)$$

$$\frac{a}{p+\alpha} < q'+\beta' \qquad \frac{a}{p+\alpha} > q'. \qquad (4)$$

On a $$r < \sqrt{q} \qquad r > \sqrt{q'}. \qquad (5)$$

Ces racines ne pourront pas non plus généralement se calculer exactement. Soient b, $b-\delta$ les valeurs approchées de $\sqrt{q}$; b', $b'+\delta'$ celles de $\sqrt{q'}$, de telle façon que

$$\sqrt{q} < b \quad , \sqrt{q} > b-\delta \qquad (6)$$

$$\sqrt{q'} < b'+\delta', \ \sqrt{q'} > b' \qquad (7)$$

d'où $$r < b \quad , \quad r > b' \qquad (8)$$

et la mesure de l'erreur sera $b-b'$.

Il suffit donc que $b-b'<i$. (9)

Or, de (6) et (7) on tire $b<\sqrt{q}+\delta$

$$b'>\sqrt{q'}-\delta'.$$

D'où $b-b'>\sqrt{q}-\sqrt{q'}+\delta+\delta'$. (10)

Ainsi, il suffit que

$$\sqrt{q}-\sqrt{q'}+\delta+\delta'<i.$$

Or $\sqrt{q}-\sqrt{q'}<i-\delta-\delta'$. (11)

D'où $\sqrt{q}<\sqrt{q'}+i-\delta-\delta'$

et $q<q'+2\sqrt{q'}(i-\delta-\delta')+(i-\delta-\delta')^2$,

puis $q-q'<2\sqrt{q'}(i-\delta-\delta')+(i-\delta-\delta')^2$; (12)

d'un autre côté, (3) et (4) donnent

$$q<\frac{a}{p}+\beta$$

$$q'>\frac{a}{p+\alpha}-\beta';$$

d'où $q-q'>\frac{a}{p}-\frac{a}{p+\alpha}+\beta+\beta'=\frac{a\alpha}{p(p+\alpha)}+\beta+\beta'$. (13)

Combinant (13) avec (12), on voit qu'il suffit que

$$\frac{a\alpha}{p(p+\alpha)}+\beta+\beta'<2\sqrt{q'}(i-\delta-\delta')+(i-\delta-\delta')^2;$$

d'où

$$\frac{a\alpha}{p(p+\alpha)}<2\sqrt{q'}(i-\delta-\delta')+(i-\delta-\delta')^2-\beta-\beta'. \quad (14)$$

Ceci est une relation entre α, β, β', δ, δ' quantités dont les 4 dernières sont, jusqu'à un certain point, arbitraires.

On essayera par un calcul direct s'il suffit de prendre

$\alpha=1$, c'est-à-dire si la différence des valeurs $\sqrt{\frac{a}{3}}$ et $\sqrt{\frac{a}{4}}$ prises pour r, est $\overline{\gtrless} i$. Je suppose que cela ne soit pas; par suite $p(p+\alpha) < 3.3$ ou 9, $\sqrt{q'} < \sqrt{\frac{a}{4}}$, et au lieu de (14), il suffit de faire

$$\frac{a\alpha}{9} < \sqrt{a}\,(i-\delta-\delta')+(i-\delta-\delta')^2-\beta,-\beta'; \qquad (15)$$

d'où $\alpha < \frac{9}{a}\left\{\sqrt{a}.(i-\delta-\delta')+(i-\delta-\delta')^2-\beta-\beta'\right\}$. (16)

Supposons $a=12$, $i=0{,}01$.

Il faut d'après (11) que $\delta+\delta'<i$.

Posons $\delta=\delta'=0{,}001$; prenant $\sqrt{a}=\sqrt{12}=3{,}4$,

(16) devient $\alpha<\frac{3}{4}\left\{3{,}4\times0{,}008+0{,}000064-\beta-\beta'\right\}$

$$=\frac{3}{4}\left\{0{,}027264-\beta-\beta'\right\}.$$

Prenons $\beta=\beta'=0{,}001$, nous aurons

$$\alpha \overline{<} \frac{3}{4}\times0{,}025264=0{,}018948.$$

Il suffit donc de prendre pour π le nombre 3,14; faisant la division (3) ou (4) à 0,001 près, et extrayant la racine de même, ou aura r à 0,01 près.

En effet on a $r<\sqrt{\frac{12}{3{,}14}}<\sqrt{3{,}822}<1{,}955$

et $r>\sqrt{\frac{12}{3{,}15}}>\sqrt{3{,}809}>1{,}949$.

La différence des deux limites de r est 0,006.

PROPOSITION VIII.

Théorème.

Les aires des figures semblables sont entre elles comme les carrés des dimensions homologues.

1° Soient (fig. 180) deux Δ ABC, ADE, semblables et semblablement placés par rapport au point A ; le côté DE sera parallèle à BC. Menons AF perpendiculaire à BC et par suite à DE. A cause des parallèles on a

$$AF : AG :: AB : AD.$$

A cause de la similitude des Δ, on a aussi

$$BC : DE :: AB : AD,$$

ou
$$\frac{1}{2} BC : \frac{1}{2} DE :: AB : AD.$$

Multipliant cette troisième proportion par la première,

on a
$$\frac{1}{2} BC \times AF : \frac{1}{2} DE \times AG :: \overline{AB}^2 : \overline{AD}.$$

Mais $\frac{1}{2}$ BC×AF est l'aire du Δ ABC (p. 4); $\frac{1}{2}$ DE×AG est celle du Δ ADE ; donc les aires de ces Δ sont comme les carrés des côtés homologues AB, AD, ou comme les carrés de deux autres dimensions homologues (l. 3, p. 11).

2° Soient maintenant (fig. 97) deux polygones semblables. Décomposons-les en Δ semblables. Soient ABC, *abc* deux Δ semblables, de même ACD, *acd*, etc. D'après ce qu'on vient de prouver, on a

$$ABC : abc :: \overline{AC}^2 : \overline{ac}^2.$$

$$ACD : adc :: \overline{AC}^2 : \overline{ac}^2,$$

d'où, à cause du rapport commun,

ABC:*abc*:ACD:*acd*,

et, ce qui se démontre de même,

::ADE:*ade*;

donc la somme des antécédents, ou l'aire du premier polygone, est à la somme des conséquents, c'est-à-dire à l'aire du second, comme ABC:*abc* ou $::\overline{AB}^2:\overline{ab}^2$, etc.

3° Enfin, soient deux secteurs semblables, répondant, par conséquent, à des angles égaux : soit S l'aire de l'un des secteurs, R son rayon, *s* l'aire de l'autre, *r* son rayon, *a* l'angle commun. On a (p. 7, r.)

$$S=\frac{a\pi R^2}{4\,d.},\ s=\frac{a\pi r^2}{4\,d.};$$

donc $$S:s::\frac{a\pi R^2}{4\,d.}:\frac{a\pi r^2}{4\,d.}\text{ ou }::R^2:r^2.$$

S'il s'agit des cercles entiers, on a $S=\pi R^2$, $s=\pi r^2$, et

$$S:s::R^2:r^2,$$

ce qui signifie que les aires des cercles sont comme les carrés des rayons, de même que les aires des secteurs semblables.

PROPOSITION IX.

Problème.

Transformer un rectangle donné en un autre rectangle équivalent, dont la base est donnée.

Soient *b*, *h* les deux côtés du rectangle donné, B la base du rectangle cherché. On cherchera une quatrième proportionnelle aux trois lignes B, *b*, *h* (l. 3, p. 8); cette quatrième proportionnelle est la hauteur du rectangle cherché. Car on aura

$$B:b::h:x,$$

d'où $b \times h = B \times x$.

Or (p. 2), $b \times h$ est l'aire du rectangle donné; $B \times x$ est celle du rectangle construit sur B et x; donc celui-ci est équivalent au premier.

PROPOSITION X.

PROBLÈME. — FIG. 181.

Transformer un polygone donné en un triangle équivalent.

Soit ABCDE le polygone. Tirez une diagonale DB qui sépare du polygone un Δ DBC; transportez le sommet C de ce Δ parallèlement à la base DB sur le côté AB prolongé, en F; ce Δ sera transformé (p. 3, r.) dans le Δ équivalent FDB, et ABCDE en un polygone équivalent AFDE qui a un côté de moins. Si sur l'angle E on fait la même construction que sur C, on obtiendra le Δ GDF équivalent au polygone donné.

Il y a, en général, à faire autant de constructions que le polygone a de sommets, moins trois.

PROPOSITION XI.

PROBLÈME.

Transformer un polygone donné en un carré équivalent, c'est-à-dire carrer *un polygone.*

1° Si le polygone donné est un ▱, on cherchera une moyenne proportionnelle entre la base et la hauteur ; cette moyenne proportionnelle sera le côté du carré demandé. Car soient b, h la base et la hauteur, x la moyenne proportionnelle, on aura

$$b:x::x:h, \text{ d'où } x^2 = b \times h.$$

Donc x^2, aire du carré fait sur x, est égal à $b \times h$, aire du ▱.

2° Si le polygone donné est un Δ, le côté du carré sera

une moyenne proportionnelle entre la base et la moitié de la hauteur.

3° Si le polygone n'est ni un Δ ni un ▱, on le transforme en un Δ équivalent (p. 10), ce qui ramène au second cas.

Remarque. Carrer une figure ou en opérer la *quadrature*, sont deux expressions synonymes. La quadrature du cercle aurait donc pour objet de trouver un carré équivalent à l'aire du cercle. A cet effet il faudrait chercher une moyenne proportionnelle entre la circonférence et la moitié du rayon. Il faudrait donc savoir construire une ligne droite égale à la circonférence, en supposant le rayon connu (l. 3).

PROPOSITION XII.

Problème.

Construire un rectangle connaissant l'aire, ainsi que la différence ou la somme des côtés adjacents.

1° On transformera (fig. 182) l'aire donnée en un carré équivalent M. Soit d'ailleurs CD la différence donnée ; sur cette droite comme diamètre on décrira une circonférence ; au point C on lui mènera une tangente CE égale au côté AB du carré ; joignant le point E au centre O, on aura deux segments EG, EF qui seront les côtés du rectangle cherché. Car, en premier lieu, la différence de ces côtés est FG ou CD, qui est la différence donnée ; en second lieu, à cause de la tangente EC et de la sécante EG, on a (l. 3, p. 27), GE : EC : : EC : EF, ou $GE \times FE = \overline{EC}^2$; donc l'aire du rectangle fait sur GE et FE, est égale à l'aire du carré fait sur EC, c'est-à-dire à l'aire donnée.

2° Soit (fig. 183) DC la somme donnée. Ayant encore transformé l'aire donnée en un carré équivalent M, sur cette ligne DC, comme diamètre, décrivez une demi-circonférence ; au point C élevez sur CD une perpendiculaire CE égale au côté AB du carré : du point E menez à CD une parallèle EF qui coupera la circonférence en un point F ; enfin, de ce point F menez FG perpendiculaire à CD, et CG, GD seront

les côtés du rectangle cherché. Car la somme de ces côtés est égale à la ligne donnée CD; de plus, la perpendiculaire FG étant moyenne proportionnelle entre les segments CG, GD (l. 3, p. 22), on a GD:FG::FG:GC, d'où $\mathrm{GD}\times\mathrm{GC}=\overline{\mathrm{FG}}^2=\overline{\mathrm{EC}}^2$. Donc l'aire du rectangle fait sur GD et GC, est égale à l'aire du carré donné, fait sur EC.

Remarque. Si (fig. 183) le carré avait son côté égal à la moitié de CD, en élevant CH perpendiculaire à CD et égale à ce côté, puis menant du point H la droite HI, parallèle à CD, on obtiendrait un point I tel, que la perpendiculaire abaissée de ce point sur CD, passerait au centre O, et on retrouverait CO et OD pour les côtés du rectangle, qui par suite ne serait que le carré donné. Mais, si le côté du carré était plus grand que CO ou CH, la parallèle menée à CD ne rencontrerait pas la circonférence, et le problème serait impossible. Car si le problème est possible, soient DK, KC les côtés du rectangle; menez KL perpendiculaire au diamètre CD; le rectangle fait sur DK et KC est équivalent au carré fait sur KL; or KL ne surpassera jamais OI. Donc si le côté du carré donné surpasse OI moitié de CD, le problème est impossible.

PROPOSITION XIII.

PROBLÈME.

Construire une figure qui soit semblable à une figure donnée P, *et qui ait une aire donnée* Q.

Soit a une dimension de la figure P, x son homologue dans la figure inconnue que je représente par X. Les figures P et X, étant semblables, sont entre elles comme les carrés des dimensions homologues (p. 8); ainsi

$$P:X::a^2:x^2.$$

Mais l'aire de X est égale à celle de Q, ce qui change cette proportion en

$$P:Q::a^2:x^2.$$

Cela posé, on carrera les figures P et Q ; soient m, n les côtés des carrés obtenus, de façon que $P=m^2$, $Q=n^2$; remplaçant P et Q par m^2 et n^2, on aura

$$m^2:n^2::a^2:x^2,$$

d'où
$$m:n::a:x.$$

Ainsi on cherchera (l. 3, p. 8) une quatrième proportionnelle aux lignes m, n, a, et sur cette quatrième proportionnelle x, comme côté homologue de a, on construira une figure semblable à P (l. 3, p. 16); cette figure aura son aire égale à Q.

PROPOSITION XIV.

Problème. — Fig. 184.

Construire une figure semblable à une figure* P, *et qui soit à celle-ci dans un rapport donné.

Soit ce rapport égal à $\frac{2}{3}$; sur une ligne indéfinie portez 2 parties égales de grandeur arbitraire de C en F; à partir de F, prenez encore 3 de ces mêmes parties de F en D, et sur CD, comme diamètre, décrivez un demi-cercle; au point F, élevez à CD une perpendiculaire FG jusqu'à la circonférence en G; tirez les cordes GC, GD et prolongez-les indéfiniment. Comme ici la figure cherchée est représentée par 2 et la figure donnée par 3, on portera sur GD, côté qui a pour projection FD égal à 3 parties, on portera, dis-je, sur GD une distance GH égale à une dimension AB de la figure P; du point H on mènera HI, parallèle DC, jusqu'à GC en I. Je dis que si sur GI, pris comme homologue de AB, on construit une figure semblable à P, elle sera égale à $\frac{2}{3}$ de P.

En effet, à cause des parallèles (l. 3, p. 5), on a

$$GI : GH :: GC : GD,$$

d'où
$$\overline{GI}^2 : \overline{GH}^2 :: \overline{GC}^2 : \overline{GD}^2.$$

Mais dans le Δ CGD rectangle (l. 2, p. 9, c. 2) en G, les carrés des côtés de l'angle droit sont entre eux comme leurs projections sur l'hypothénuse (l. 3, p. 23); donc

$$\overline{GC}^2 : \overline{GD}^2 :: CF : FD :: 2 : 3.$$

Rapprochant cette proportion de la précédente, on obtient

$$\overline{GI}^2 : \overline{GH}^2 :: 2 : 3.$$

Enfin, appelant X la figure construite sur GI, on aura (p. 8)

$$X : P :: \overline{GI}^2 : \overline{AB}^2 \text{ ou } \overline{GH}^2,$$

et à cause du rapport commun,

$$X : P :: 2 : 3.$$

Donc $X = \frac{2}{3} P$.

Remarque. On peut demander que la figure cherchée soit à P comme une ligne est à une autre. Dans ce cas, on prend CF égal à la première de ces lignes, FD égal à la seconde, et le reste de la construction est le même.

PROPOSITION XV.

Problème. — Fig. 185.

Etant données deux figures semblables ABC, *abc*, *en construire une troisième qui leur soit aussi semblable, et qui, de plus, soit égale à leur somme ou à leur différence.*

1° Si la figure cherchée doit être égale à la somme des deux figures données, on fera un angle droit sur les côtés duquel on prendra, à partir du sommet, les distances DF, DE respectivement égales à deux dimensions homologues

AB, *ab* des deux figures données ; on joindra EF, et sur cette ligne, comme dimension homologue à AB, on fera une figure EHF semblable à ABC ; je dis qu'elle sera égale à ABC $+abc$. Car les figures ABC, *abc*, étant semblables, on a (p. 8)

$$ABC : abc :: \overline{AB}^2 : \overline{ab}^2,$$

d'où $$ABC + abc : ABC :: \overline{AB}^2 + \overline{ab}^2 : \overline{AB}^2.$$

Mais on a aussi $$EHF : ABC :: \overline{FE}^2 : \overline{AB}^2.$$

Or, à cause du triangle rectangle EDF, on a $\overline{FE}^2 = \overline{FD}^2 + \overline{ED}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{ab}^2$; ainsi, dans ces deux proportions, les trois derniers termes sont communs, et par suite $EHF = ABC + abc$.

2° Supposons qu'il s'agisse de construire une figure égale à la différence des figures ABC, *abc*. Sur un des côtés d'un angle droit, on prend DE égal à une dimension *ab* de la plus petite des deux figures ; du point E comme centre, et d'un rayon égal à AB, homologue de *ab*, on décrit un arc de cercle qui coupe l'autre côté de l'angle droit en un point G ; sur GD, comme homologue de AB, on fait une figure semblable à ABC, et cette figure GID sera égale à $ABC - abc$. Car de la proportion $ABC : abc :: \overline{AB}^2 : \overline{ab}^2$, on déduit

$$ABC - abc : ABC :: \overline{AB}^2 - \overline{ab}^2 : \overline{AB}^2.$$

Mais à cause du triangle rectangle GED, on a

$$\overline{AB}^2 - \overline{ab}^2 = \overline{GE}^2 - \overline{DE}^2 = \overline{GD}^2.$$

Comparant donc cette proportion avec la suivante

$$GID : ABC :: \overline{GD}^2 : \overline{AB}^2,$$

on aura $$GID = ABC - abc.$$

Remarque 1. Si les figures données sont des carrés, la construction est évidemment la même, et le raisonnement se simplifie, puisque le carré fait sur l'hypothénuse, etc.

Remarque 2. S'il s'agit de faire une figure semblable à ABC et ayant avec la somme ABC+*abc* un rapport donné, on cherche d'abord la figure EHF égale à cette somme, ensuite, au moyen du problème précédent, on construit une figure qui soit semblable à EHF, et soit avec EHF dans le rapport donné.

Enfin, s'il faut trouver une figure semblable à une figure donnée F, et dont l'aire ait un rapport donné avec $mP+nQ$, m, n étant deux nombres donnés, P, Q deux figures données, on cherchera d'abord les figures mP, nQ (p. 14); puis on les transforme en des figures respectivement équivalentes, semblables à F (p. 13), ce qui ramène à pr. 15.

LIVRE V.

LES FIGURES DANS L'ESPACE :

GRANDEUR ABSOLUE DE LEURS ÉLÉMENTS.

LES DROITES ET LES PLANS

DANS LEURS POSITIONS RELATIVES.

PROPOSITION I.

THÉORÈME. — FIG. 186.

Si deux plans se rencontrent, leur intersection est une ligne droite.

Je dis d'abord que si deux plans AB, CD, ont un point E commun, ils en ont deux de communs. En effet, du point E menez dans le plan CD deux segments de droites quel-

conques EF, EG, l'un d'un côté du plan AB, l'autre de l'autre, ce qui est possible, vu que toute droite menée par le point E dans le plan CD, perce le plan AB en E, passe par conséquent d'un côté à l'autre de ce plan, sauf le cas où elle serait en même temps dans le plan AB, et alors les deux plans ayant une droite commune, la proposition serait démontrée. Joignez un point F de l'un de ces segments avec un point G de l'autre ; les droites EF, EG étant dans le plan CD, les points F, G y seront, et la droite FG, qui y a deux points, y sera tout entière. Mais cette droite passe d'un côté du plan AB à l'autre ; donc elle coupera ce plan en un point H, lequel, étant un point de la droite FG, appartient aussi au plan CD qui contient cette droite. Donc les deux plans ont deux points E, H communs ; et la droite EH est dans chacun de ces plans (*Prélim.* d. 8).

Aucun point, pris hors de EH, ne saurait appartenir aux deux plans à la fois ; car soit I un pareil point ; les deux plans passant tous les deux par les trois points I, E, H, non en ligne droite, ne feraient qu'un seul et même plan.

Déf. 1. L'intersection de deux plans est aussi appelée la *trace* de l'un des plans sur l'autre.

Déf. 2. Le point commun à une droite et à un plan qui se coupent, est appelé le *pied* ou la *trace* de la droite sur le plan.

PROPOSITION II.

Théorème. — Fig. 187.

Une droite AB *perpendiculaire à deux autres* BC, BD, *menées par son pied* B *dans un plan* EF, *est perpendiculaire à toute autre droite* BG *qui passe par ce pied, dans le plan* EF.

Puisque les droites BC, BG, BD sont dans un même plan EF, on peut mener une droite CD qui les coupe toutes les trois. Soient C, G, D les points d'intersection. Prolongez

AB vers A', et après avoir pris les deux distances AB, A'B, égales, mais arbitraires, joignez les points A, A' à chacun des trois points C, G, D. Puisque AB est perpendiculaire à BD, et que A'B=AB, BD sera perpendiculaire au milieu de AA', et l'on a DA = DA' (l. 1); de même CA = CA'. Par suite, les Δ ACD, A'CD ont le côté CD commun, les côtés AD, AC sont égaux à A'D, A'C. Donc (l. 1) ils sont superposables; les points C, D resteront communs, et le point A' tombera en A. Par conséquent GA coïncide avec GA', et ces deux distances sont égales; mais AB est aussi égal à A'B. Ainsi la droite BG, qui a deux points B, G, également distants de A, A', est perpendiculaire à AA', et réciproquement AA' ou AB est perpendiculaire à BG.

Corollaire. Une droite BH, qui n'est pas perpendiculaire à toutes les droites menées par son pied B, dans un plan EF, ne l'est qu'à une seule au plus. Car si elle l'était à deux, elle le serait à toutes.

Déf. 3. Une droite AB, perpendiculaire à toutes celles qui passent à son pied, dans un plan EF, est dit *perpendiculaire* à ce plan, et le plan est dit *perpendiculaire* à la droite. Si la droite BH n'est pas perpendiculaire à toutes celles qui passent à son pied dans un plan EF, la droite BH et le plan EF sont dits *obliques* l'un par rapport à l'autre.

Déf. 4. La trace B de la perpendiculaire AB, menée d'un point A sur un plan EF, se nomme la *projection* de A sur le plan EF, qui prend le nom de *plan de projection*.

Le lieu des projections des points d'une ligne est appelé *projection* de cette ligne. La projection d'une aire est l'aire terminée par la projection du contour de l'aire projetée.

PROPOSITION III.

Théorème. — Fig. 188.

Par un point il ne passe pas plus d'une droite perpendiculaire à un plan.

1° Supposons qu'en un point A d'un plan BC, il existe

deux droites AD, AE perpendiculaires à ce plan. Ces droites, se coupant, déterminent un plan qui coupera le plan BC en une droite AF ; or AD, qui, par hypothèse, est perpendiculaire au plan BC, le sera à la droite AF menée par son pied dans ce plan ; de même AE serait perpendiculaire à AF. Donc au même point A d'une droite AF, on pourrait mener à cette droite deux perpendiculaires AD, AE, situées avec elle dans un même plan, ce qui est impossible (l. 1), donc, etc.

2° Fig. 189. Supposons que d'un point A pris hors d'un plan BC, partent deux droites AD, AE perpendiculaires à ce plan, et le coupant aux points D, E ; tirez la droite DE qui sera dans le plan BC. Les droites AD, AE, perpendiculaires au plan BC, le sont à la droite DE (d. 3) ; donc le Δ DAE aurait deux angles droits, ce qui est impossible ; donc, etc.

PROPOSITION IV.

Théorème. — Fig. 190.

Par un point il ne passe pas plus d'un plan perpendiculaire à une droite.

Supposons que par un point il passe deux plans distincts perpendiculaires à une droite AB ; ces deux plans ayant un point commun, se couperont, et leur intersection présente deux cas : ou elle coupera la droite AB, ou elle ne la coupera pas.

1° Soient CF, CE les deux plans, GC leur intersection, coupant AB en C. Par ce point C, menez dans le plan CF une droite CH, différente de CG. Par AB et CH, faites passer un plan AK, qui coupera le plan CE suivant une droite CI, distincte de CH, puisque celle-ci ne se confond pas avec CG. Or, la droite AB, par hypothèse perpendiculaire aux plans CF, CE, l'est aux droites CH, CI (d. 3) ; donc au même point C de AB, et dans un plan AK qui contient cette droite,

il y aurait deux perpendiculaires CH, CI, à cette droite, ce qui ne se peut ; donc, etc.

2° Fig. 191. Soit toujours AB la droite ; soient CD, CE les deux plans supposés perpendiculaires à cette droite, CF leur intersection, droite qui ne coupe pas AB. Soient G, H, les traces de AB sur ces plans ; joignez-les à un point quelconque F de l'intersection. Si la droite AB était perpendiculaire aux deux plans, elle le serait aux droites GF, HF, et le Δ GHF aurait deux angles droits, ce qui ne se peut.

Remarque. Pour mener (fig. 187) par un point B d'une droite AB un plan perpendiculaire à AB, menez en B à AB, dans deux plans quelconques ABC, ABD passant par AB, les perpendiculaires BC, BD ; le plan BCD sera le plan cherché. S'il s'agit de mener le plan par un point C pris hors de AB, menez de C sur AB la perpendiculaire BC, ensuite en B la perpendiculaire BD autre que BC ; le plan BCD sera le plan cherché (p. 2 et d. 3).

PROPOSITION V.

Théorème. — Fig. 192.

Le lieu des perpendiculaires AC, AD, AE, *etc., menées à une droite* AB, *par un de ses points* (A), *est un plan perpendiculaire à cette droite* AB.

Car deux de ces droites AC, AD déterminent un plan perpendiculaire à AB (p. 2 et d. 3), puisque AB est perpendiculaire aux droites AC, AD, situées dans ce plan. De même le plan des droites AF, AE est perpendiculaire à AB, etc. Or, tous ces plans perpendiculaires à la droite AB au même point A, se confondent (pr. 4) ; donc les droites AC, AD, etc., sont toutes dans un même plan perpendiculaire à AB.

Corollaire. Si un angle droit BAC tourne autour du côté AB supposé immobile, le côté AC, restant toujours perpendiculaire à AB, décrira un plan perpendiculaire à AB, en A.

PROPOSITION VI.

THÉORÈME. — FIG. 193.

Si d'un point A pris hors d'un plan BC, *on mène à ce plan une perpendiculaire* AD, *et différentes obliques* AE, AF, AG, AH :

1° *La perpendiculaire sera plus courte que toute oblique;*

2° *Les obliques également écartées de la perpendiculaire seront égales, et réciproquement;*

3° *De deux obliques inégalement écartées de la perpendiculaire, celle qui s'écarte le plus sera la plus longue, et réciproquement.*

Joignez le pied D de la perpendiculaire aux pieds E, F, G, H, etc. des obliques. Faites tourner les Δ rectangles ADF, ADG, etc., autour de AD, jusqu'à ce que les côtés DF, DG, DH viennent se confondre avec la direction de DE ; les obliques et la perpendiculaire étant maintenant dans un même plan ADE, la proposition actuelle est réduite à la prop. 20 du Ier livre, et se trouve démontrée de même que les réciproques. Celle de la seconde partie prouve que les traces E, F, G... d'obliques toutes égales, sont également distantes du point D ; leur lieu est donc une circonférence de cercle qui a le point D pour centre.

PROPOSITION VII.

THÉORÈME. — FIG. 194.

Le plan AB *perpendiculaire au milieu* C *d'une droite* DE, *est le lieu des points également distants des extrémités* D, E *de la droite.*

D'abord soit un point A dans le plan ; si on le joint au point C, la droite AC sera perpendiculaire au milieu de DE ; donc chacun de ses points est également distant de D et E ;

il en est donc ainsi du point A, et par suite de tout point du plan.

Soit ensuite un point F pris hors du plan ; joignez-le aux points D, E par les droites FD, FE ; l'une de ces droites, FE, coupera le plan en un point G, et si l'on tire GC, cette droite sera perpendiculaire au milieu de DE ; donc (l. I, p. 21) FE>FD. Donc, etc.

PROPOSITION VIII.

Théorème. — Fig. 195.

Les droites AC, AC' *qui joignent un point* A *d'un plan* DE, *à des points quelconques* C, C', *d'une même droite* BC *perpendiculaire au plan, sont toutes perpendiculaires à une même droite menée par le premier point,* A, *dans le plan.*

Soit B la trace de la perpendiculaire BC ; tirez AB, et par le point A menez à la droite AB, dans le plan DE, la perpendiculaire FG ; je dis que AC, AC' sont aussi perpendiculaires à FG. Pour le prouver, prenez sur FG, de part et d'autre du point A, les distances AF, AG arbitraires, mais égales entre elles ; tirez BF, BG qui, s'écartant également de AB, perpendiculaire à FG, seront égales (l. I). Par suite, si l'on joint CF, CG, ces obliques s'écarteront également de BC, qui est perpendiculaire au plan DE ; donc (pr. 6) elles sont aussi égales. Ainsi la droite AC a deux points A, C, également éloignés des points F, G ; donc elle est perpendiculaire au milieu de FG. Même raisonnement pour AC'.

Corollaire. Le lieu des droites AB, AC, AC'... est un plan perpendiculaire à FG (p. 5), et ce plan est déterminé par le point A et la droite BC.

PROPOSITION IX.

Théorème. — Fig. 196.

Si deux droites AB, CD, *sont parallèles, tout plan* EF

perpendiculaire à l'une (AB) *est perpendiculaire à l'autre* CD; *réciproquement, deux droites perpendiculaires à un même plan sont parallèles.*

1° Soient B, D, les traces des droites; tirez BD, et au point D menez dans le plan EF la droite GH perpendiculaire à BD; elle sera (p. 8) perpendiculaire au plan ABD, et par conséquent à CD qui est située dans ce plan. Mais AB étant perpendiculaire au plan EF, l'est à la droite BD; donc CD, qui est parallèle à AB, est aussi perpendiculaire à BD. Ainsi la droite CD est perpendiculaire aux droites BD, DG; donc elle l'est à leur plan BDG ou EF.

2° Réciproquement, si les droites AB, CD sont perpendiculaires à un même plan EF, je dis qu'elles sont parallèles. Joignez les traces B, D, et au point D menez dans le plan EF, la droite GH perpendiculaire à BD; le plan ABD sera perpendiculaire à GH; mais la droite CD, perpendiculaire au plan EF, est aussi perpendiculaire à GH; donc cette droite CD est dans le plan ABD (p. 5). De là on conclut que les droites AB, CD sont dans un même plan; d'ailleurs, elles ne peuvent se rencontrer, puisqu'elles sont perpendiculaires à un même plan EF; donc elles sont parallèles.

PROPOSITION X.

Théorème. — Fig. 197.

D'un point donné on peut toujours mener une perpendiculaire à un plan donné GH.

1° Le point donné est dans le plan : soit A ce point. Prenez dans l'espace une droite quelconque *ab*; par cette droite faites passer deux plans quelconques *bd, bc*, et dans chacun de ces plans menez à la droite *ab*, en un même point *a*, une perpendiculaire; soient *ac, ad* ces perpendiculaires. Dans le plan donné GH, faites au point A l'angle CAD égal à *cad;* placez ce dernier sur CAD, et la droite *ab* prendra une po–

sition AB, perpendiculaire au plan CAD (p. 2), qui est le plan donné.

2° Si le point donné est en E, hors du plan GH, par un point quelconque A pris dans ce plan, menez-lui une perpendiculaire AB ; par cette droite et par le point E, imaginez un plan, et dans ce plan menez du point E une droite EF parallèle à AB ; EF sera perpendiculaire au plan GH, en vertu de la pr. 9.

PROPOSITION XI.

Théorème. — Fig. 198.

Deux droites A, B, *parallèles à une même troisième* C, *sont parallèles entre elles.*

Menez un plan quelconque DE, perpendiculaire à C ; la droite A, parallèle à C, sera aussi perpendiculaire à ce plan ; de même la droite B, parallèle à C, sera perpendiculaire à ce plan. Donc les droites A, B, perpendiculaires à un même plan DE, sont parallèles.

Déf. 5. Une droite et un plan qui n'ont pas de point commun sont dits *parallèles*.

PROPOSITION XII.

Théorème. — Fig. 199.

Deux droites AB, CD, *étant parallèles, tout plan* EF *qui contient la seconde, sans contenir la première* AB, *est parallèle à celle-ci. Réciproquement, une droite* AB *est parallèle à toute autre* CD, *située dans deux plans dont l'un* (AD) *contient la première, tandis que l'autre* (EF) *lui est parallèle.*

Puisque les droites AB, CD sont parallèles, elles sont dans un même plan ABCD, lequel coupe le plan EF suivant CD ; si donc la droite AB, qui est dans ce plan ABCD, pouvait couper le plan EF en un point, ce point d'intersection, ap-

partenant à AB, serait dans le plan ABDC; il serait aussi dans le plan EF; donc il serait commun à ces deux plans, et ferait partie de leur intersection CD; il appartiendrait donc à la fois à AB et à CD; or, ces droites, étant parallèles, n'ont pas de point commun. Donc AB et le plan EF n'en ont pas non plus; et sont parallèles.

Réciproquement: car AB, qui est parallèle au plan EF, ne rencontre pas ce plan; donc AB ne rencontre pas non plus la droite CD située dans ce même plan; d'ailleurs AB, CD sont dans un plan AD; donc ces droites sont parallèles.

Remarque. Un plan passant par AB et par un point C pris dans le plan EF, coupera celui-ci en une droite CD parallèle à AB; et comme par le point C on ne peut mener qu'une parallèle à AB, il s'ensuit que la parallèle, *menée à* AB *par le point* C *dudit plan* EF, *qui est lui-même parallèle à* AB, *est dans ce plan* EF.

PROPOSITION XIII.

Théorème. — Fig. 200.

Deux plans concourants AB, CB, *contenant respectivement deux droites parallèles* AD, CE, *se coupent en une droite* FB *parallèle à celles-ci.*

Car la droite CE, parallèle à AD, l'est au plan AB qui contient la droite AD (p. 12); donc le plan CB, qui passe par la première droite CE, coupera le plan AB en une droite BF, parallèle à CE, parallèle aussi à AD (p. 12).

PROPOSITION XIV.

Théorème. — Fig. 201.

Une droite AB *étant parallèle à un plan* CD, *toute perpendiculaire* AE *menée d'un point de la droite* AB, *sur le plan* CD, *est aussi perpendiculaire à la droite* AB.

Imaginez le plan ABE; sa trace sur le plan CD sera une

droite EF parallèle à AB (p. 3) ; or, AE, perpendiculaire au plan CD, l'est à EF qui est dans ce plan (d. 3) ; donc AE est aussi perpendiculaire à la droite AB, vu que celle-ci est parallèle à EF.

PROPOSITION XV.

THÉORÈME. — FIG. 202.

Les parallèles AB, CD, *comprises entre une droite* AC *et un plan* EF *qui lui est parallèle, sont égales.*

En effet, les parallèles AB, CD déterminent un plan AD, contenant AC, et coupant le plan EF en une droite BD, parallèle à AC (p. 12). Ainsi la figure ACDB est un ▱, et AB=CD.

Corollaire. Si AB était perpendiculaire au plan EF, CD qui est parallèle à AB serait aussi perpendiculaire à ce plan (p. 9); ces deux droites seraient encore perpendiculaires à AC (p. 14), et comme elles sont égales, il s'ensuit qu'*une droite parallèle à un plan a tous ses points également distants de ce plan.*

DÉF. 6. Deux plans qui, prolongés indéfiniment, ne se rencontrent pas, sont dits *parallèles*.

PROPOSITION XVI.

THÉORÈME. — FIG. 203.

Les traces AB, CD, *d'un plan* AD *sur deux plans parallèles* EF, GH, *sont parallèles.*

Car les traces AB, CD sont dans un même plan AD. De plus elles ne peuvent se rencontrer, puisqu'elles sont respectivement dans deux plans parallèles; donc ces droites AB, CD, sont parallèles.

PROPOSITION XVII.

THÉORÈME. — FIG. 204.

Une droite AB, *perpendiculaire à un plan* CD, *est perpendiculaire à tout plan* EF *parallèle au premier.*

Dans le plan EF et par la trace B de la droite AB menez une droite quelconque BF ; par AB et BF conduisez un plan : il coupera le plan CD en une droite AD, parallèle à BF (p. 16). Mais AB, perpendiculaire au plan CD, l'est à la droite AD, menée par son pied A, dans ce plan ; donc AB est aussi perpendiculaire à BF, qui est parallèle à AD ; ainsi AB est perpendiculaire à toute droite BF menée par B dans le plan EF. Par suite AB est perpendiculaire au plan EF.

PROPOSITION XVIII.

THÉORÈME. — FIG. 205.

D'un point A *pris hors d'un plan* BC, *on peut toujours mener un plan unique parallèle au plan* BC.

Du point A menez AD perpendiculaire à BC, et par A le plan EF perpendiculaire à AD ; il sera parallèle au plan BC. Car les plans perpendiculaires à une droite AD ne sauraient avoir un point commun, vu que d'un point on ne saurait mener deux plans perpendiculaires à une droite. En second lieu, ce plan EF sera le seul plan parallèle à BC et passant en A. Car tout plan mené par le point A et parallèle à BC, est perpendiculaire à la droite AD ; or, au point A on ne peut mener qu'un plan perpendiculaire à cette droite ; donc, etc.

PROPOSITION XIX.

THÉORÈME. — FIG. 206.

Des droites parallèles AB, A'B' A''B'', *etc., comprises en-*

tre des plans parallèles CD, C'D', *sont égales. Réciproquement, les extrémités* B, B', B''... *des droites* AB, A'B', A''B''... *égales et parallèles, prises à partir d'un même plan* CD *et d'un même côté de ce plan, sont dans un second plan parallèle au premier.*

Les paralèlles AB, A'B' déterminent un plan AB' dont les traces sur les plans CD, C'D', sont les droites AA', BB', qui joignent les pieds des droites AB, A'B'. Ces droites AA', BB'... sont parallèles comme traces d'un plan AB' sur deux plans parallèles (p. 16) CD, C'D'. Par conséquent la figure AA'B'B est un ▱, et AB=A'B'. On prouve de même que A'B'= A''B''=etc.

Réciproquement, si de différents points A, A'... d'un plan CD, on mène d'un même côté de ce plan des droites AB, A'B',... égales et parallèles, le lieu des extrémités B, B'... est un plan parallèle au plan CD. Car si du point B on mène un plan parallèle à CD, ce nouveau plan doit intercepter avec CD, et sur les parallèles AB, A'B', des distances égales ; donc il passe par les points B', B'', etc.

Déf. 7. — Fig. 207. On appelle *angle dièdre* ou simplement *dièdre* une figure formée par deux plans AB, AC, qui se coupent, et se terminent d'un côté à leur intersection AD, restant d'ailleurs indéfinis. Ces plans AB, AC, ainsi limités d'un côté, se nomment les *faces* du dièdre ; l'intersection AD est appelée l'*arête*. On désigne le dièdre par quatre lettres, dont deux A, D, placées sur l'arête, les deux autres B, C, sur les faces ; celles-là se placent entre celles-ci : dièdre BADC. Lorsqu'un dièdre n'a son arête commune avec aucune autre, on peut le désigner par deux lettres placées sur cette arête.

Pour comparer deux dièdres BADC, B'A'D'C' quant à l'égalité ou à l'inégalité, on placera l'arête A'D' sur AD, la face A'C' sur AC, de façon que A'B' tombe, par rapport à AC, du même côté que AB ; selon que A'B' tombera entre AB et AC sur AB, ou au delà de AB par rapport à AC, le dièdre A'D' sera dit plus petit que AD, égal à AD, ou plus grand que AD.



Soient (fig. 208) deux plans AB, AC, se coupant suivant AD ; imaginons que le plan AC soit d'abord couché sur le plan AB, et qu'il tourne autour de AD, pour prendre successivement diverses positions, dont AC, AC'... sont quelques-unes ; d'après ce qui vient d'être dit, à mesure que AC avance dans son mouvement, le dièdre qu'il fait avec AB va en augmentant, et celui qu'il fait avec AE, prolongement de AB, diminue jusqu'à ce que le plan mobile coïncide avec AE.

Les trois dièdres consécutifs BADC, CDAC', C'DAC'', qui ont même arête AD, déterminent un dièdre unique BADC'' qui sera appelé la *somme* des trois premiers. Ainsi, pour additionner deux dièdres CDAB, C'DAC, on leur donne même arête AD et une face AC commune, en les plaçant de différents côtés de cette face ; les deux faces non communes AB, AC' déterminent le dièdre C'ADB, somme des deux autres, de sorte que C'ADB=C'ADC+CADB.

On peut donc, comme pour les angles, ajouter, soustraire des dièdres, multiplier un dièdre par un nombre entier, et concevoir la division d'un dièdre en parties égales.

DÉF. 8. — FIG. 209. Un plan AB est dit *perpendiculaire* à un autre CD, si les dièdres adjacents AEBD, AEBC, qu'il fait avec celui-ci, sont égaux. Ces dièdres eux-mêmes sont appelés *droits*. (*Comparez* 1er livre.)

Remarque. Par une droite BE, prise dans un plan CD, il ne passe pas plus d'un plan perpendiculaire à CD ; car si le plan ABE est perpendiculaire à CD, tout autre plan BG mené par BE, du même côté que AB, par rapport à CD, fera avec CD deux dièdres dont l'un sera plus petit, et l'autre plus grand que l'un des dièdres égaux AEBD, AEBC.

DÉF. 9. — FIG. 210. On appelle *section droite* d'un dièdre AB, l'angle CAD déterminé par l'intersection des faces, coupées par un plan CAD perpendiculaire à l'arête AB, ou, ce qui revient au même, l'angle déterminé par les droites AC, AD, menées respectivement dans les faces, perpendiculairement à un même point A de l'arête.

PROPOSITION XX.

THÉORÈME. — FIG. 210.

Deux dièdres égaux ont des sections droites égales, et réciproquement.

Soient AB, A'B' deux dièdres égaux, CAD, C'A'D' les sections droites. Superposez les dièdres, de façon que le point A' tombe en A. L'angle droit B'A'C' coïncidera avec son égal BAC, et B'A'D' avec BAD ; donc angle CAD=C'A'D'.

Réciproquement, si CAD = C'A'D', les dièdres seront égaux. Car superposez l'angle C'A'D' avec CAD : les droites A'B', AB, seront, après cette superposition, perpendiculaires au même plan, en un même point ; ainsi elles coïncideront, et les dièdres aussi.

Corollaire 1. La section droite d'un dièdre est la même, à quelque point de l'arête qu'elle ait son sommet.

Corollaire 2. — FIG. 209. Deux plans AB, CD étant perpendiculaires, si en un point E de l'intersection EB on mène un plan DAE perpendiculaire à cette droite, ce plan déterminera les sections droites AED, AEF des deux dièdres droits ; ces sections sont égales, vu que les dièdres sont égaux ; donc (l. 1) ces sections sont des angles droits. Par conséquent, dans tout dièdre droit, la section droite est un angle droit, et réciproquement, un dièdre est droit, si la section est un angle droit.

PROPOSITION XXI. ***La somme des deux dièdres adjacents qu'un plan fait avec un autre, est égale à deux droits, et réciproquement, etc.***

PROPOSITION XXII. *Si deux plans indéfinis se coupent, les dièdres opposés sont égaux, etc.*

Remarque 1. Deux plans qui se terminent à leur intersection, déterminent deux dièdres, l'un plus grand, l'autre plus petit que deux droits. Sauf avis contraire, il s'agira

toujours du premier. Il en est ici comme de deux droites concourantes.

Remarque 2. Les dénominations d'alternes, internes, etc., s'appliquent aux dièdres et dans les mêmes cas qu'aux angles formés par des droites.

PROPOSITION XXIII.

THÉORÈME. — FIG. 211.

Deux plans parallèles coupés par un plan transversal présentent, par rapport aux dièdres, les relations que deux droites parallèles coupées par une transversale offrent par rapport aux angles.

Soient AB, A'B' les plans parallèles ; CD le plan transversal ; EF, E'F' ses traces sur les deux premiers. Par un point quelconque F, de EF conduisez un plan perpendiculaire à EF ; il sera aussi perpendiculaire à E'F', qui est parallèle à EF (p. 9) ; soit GB' ce plan, et soient GD, FB, F'B' ses traces sur nos trois plans. GB' étant perpendiculaire à EF et à E'F', il s'ensuit que les angles formés par les droites GD, BH, B'H', autour de F et de F', sont les sections droites respectives des dièdres qui ont pour arêtes EF, E'F'. Or, les droites BH, B'H' sont parallèles comme traces d'un plan GB' sur deux plans parallèles. Donc les dièdres alternes internes BFED, A'E'F'G sont égaux, vu que leurs sections droites sont égales, etc., etc.

PROPOSITION XXIV.

THÉORÈME. — FIG. 211.

Si deux plans AB, A'B', *dont les traces* EF, E'F' *sur un troisième plan* CD *sont parallèles, font avec ce troisième plan des dièdres alternes internes égaux, ou des dièdres alternes externes égaux, etc.* (comme l. 1, p. 5), *ces plans* AB, A'B' *sont parallèles.*

Soit le dièdre BFED égal à A'E'F'G ; si le plan AB n'était pas parallèle au plan A'B', par un point F de EF on pourrait mener un plan parallèle à A'B' ; or, la droite E'F', située dans le plan A'B', serait aussi parallèle à ce nouveau plan (d. 6). Donc EF, parallèle à E'F', sera dans ce même nouveau plan (p. 12, r.) que je suppose être EI. Mais si ce plan EI est parallèle à A'B', le dièdre IFED sera égal à A'F'E'G, et par suite à BFED, ce qui exige que le plan EI se confonde avec AB. Donc les plans AB, A'B' sont parallèles. Même raisonnement dans les autres cas, qui peuvent du reste tous se réduire au précédent.

PROPOSITION XXV.

THÉORÈME. — FIG. 212.

Deux plans AB, ED *sont perpendiculaires, si l'un* AB *contient une droite* AC *perpendiculaire à l'autre* ED.

Au point C, trace de AC, menez dans le plan DE une droite CD perpendiculaire à CB ; l'angle ACD sera droit, vu que AC est perpendiculaire au plan DE, et par suite à la droite CD située dans ce plan. Or, cet angle, formé par les droites AC, CD, perpendiculaires à CB, est la section droite du dièdre ACBD ; donc ce dièdre est droit, et les deux plans sont perpendiculaires (p. 20, c. 2).

Remarque. L'énoncé de cette proposition revient à celui-ci : *Un plan* DE, *perpendiculaire à une droite* AC, *l'est à tout plan* AB *qui la contient.*

PROPOSITION XXVI.

THÉORÈME. — FIG. 212.

Une droite AC, *menée dans une face* AB *d'un dièdre droit* ABCD, *perpendiculairement à l'arête* BC, *est perpendiculaire à l'autre face* BD.

Au point C, trace de AC sur le plan BD, menez dans ce

plan la droite CD perpendiculaire à l'arête BC ; ACD sera la section droite du dièdre ABCD, et comme celui-ci est droit, ACD sera un angle droit. Donc AC, qui est déjà perpendiculaire à BC, l'est aussi à CD, et par suite au plan BD (p. 2, et d. 3).

PROPOSITION XXVII.

Théorème. — Fig. 212.

Une droite AC *et un plan* AB, *étant perpendiculaires à un même plan* CD, *la droite est parallèle au premier plan, ou s'y trouve située.*

Supposons que la droite AC ait un point A dans le plan AB : si de ce point A on mène dans le plan AB une droite perpendiculaire à sa trace BC, cette nouvelle droite sera (p. 26) perpendiculaire au plan CD ; or, deux perpendiculaires à un plan se confondent si elles ont un point commun (p. 3). Donc cette seconde perpendiculaire se confond avec AC, et AC se trouve dans le plan AB. Si donc la droite AC n'était pas tout entière dans le plan AB, elle n'y aurait pas même un point, et lui serait parallèle.

Corollaire. Les perpendiculaires menées sur un plan ED, par tous les points d'une droite AF, sont donc dans un plan AB perpendiculaire à ED, et la trace BC de ce plan AB est le lieu des projections de tous les points de la droite AF sur le plan AB, c'est-à-dire que la projection d'une droite sur un plan est une droite.

PROPOSITION XXVIII.

Théorème. — Fig. 213.

Un plan AB, *perpendiculaire à une droite* CD, *est perpendiculaire à tout plan* EF *parallèle à cette droite.*

En effet, par CD et un point E du plan EF, menez un plan : il coupera le plan EF, parallèle à CD, en une droite EG parallèle à la même droite CD (p. 12). Or, CD est per-

pendiculaire au plan AB; donc EG l'est aussi (p. 9). Par suite, le plan EF, passant par une droite EG, perpendiculaire au plan AB, est perpendiculaire à ce dernier plan (p. 25).

PROPOSITION XXIX.

Théorème. — Fig. 214.

Un plan CD, *perpendiculaire à deux plans* AB, A'B' *qui se coupent, est perpendiculaire à leur intersection* EF.

Car si d'un point E de l'intersection EF, on mène une perpendiculaire au plan CD, cette perpendiculaire ayant un point E dans le plan AB, se trouve dans ce plan (p. 27). Mais cette perpendiculaire a aussi un point E dans le plan A'B', qui est également perpendiculaire au plan CD; elle est donc aussi dans le plan A'B'. Elle se confond donc avec EF, intersection des plans AB, A'B'.

PROPOSITION XXX.

Théorème. — Fig. 215.

Si deux droites AB, CD, *ne sont pas dans un même plan, il en existe toujours une troisième unique qui les coupe toutes les deux à angles droits, et sur laquelle se mesure la plus courte distance des deux premières.*

Par un point quelconque C de CD menez CE parallèle à AB; les droites CD, CE déterminent un plan DCE, parallèle à AB (p. 12) et qui ne contient pas AB. Sur ce plan projetez un point quelconque A de AB en G: par AB et AG menez un plan AGB qui sera perpendiculaire au plan DCE (p. 25), et dont la trace GH sur celui-ci sera parallèle à AB (p. 12). Cette trace ne sera donc pas parallèle à CD, sans quoi CD serait parallèle à AB, ce qui n'est pas. Ainsi GH coupera CD en un point F; soit CI une perpendiculaire au plan DCE, menée par un point de CD. Le plan ICD sera

perpendiculaire au plan DCE (p. 25), et coupera le plan AGB en une droite KF perpendiculaire au plan DCE ; droite perpendiculaire par conséquent à CD, à GH, ainsi qu'à AB, qui est parallèle à GH. Il n'y a qu'une seule perpendiculaire qui soit commune à AB et à CD. Car toute perpendiculaire commune KF l'est à CD, et à GH menée par le point F parallèlement à AB; elle est donc dans les plans ICD, AGB. Cette droite KF est la plus courte distance de AB, CD. Car si une droite, menée entre AB, CD, n'est pas perpendiculaire à AB, du point où elle coupe CD on pourra mener sur AB une perpendiculaire qui sera plus courte. Donc, etc.

Déf. 10.—Fig. 216. Un *angle polyèdre* est une figure formée par plusieurs plans ABC, ACD, ADE, etc., qui passent tous par un même point A, chacun d'eux étant limité à ses intersections avec deux autres, tout en restant indéfini entre ces droites, d'un côté du point commun A, qu'on nomme le *sommet*. Les angles BAC, CAD, etc., se nomment les *faces*, les droites AB, AC, intersections de ces faces, sont appelées les *arêtes*. Les dièdres AD, AE, AF..., compris entre les faces, sont les dièdres de l'angle polyèdre.

Un angle polyèdre à trois faces se nomme *angle trièdre*, ou simplement *trièdre*. S'il a quatre faces, il est nommé *angle tétraèdre*, etc.

Si deux angles polyèdres ont même sommet, et que le plan d'une face de l'un soit superposé avec celui d'une face de l'autre, leur système forme un troisième angle polyèdre égal à la somme des deux premiers, que ces faces juxtaposées soient égales ou non.

Pour désigner un angle polyèdre, on peut se servir d'une lettre placée au sommet, si aucun autre angle polyèdre n'a le sommet au même point. Dans le cas contraire, à la suite de la lettre du sommet, on énoncera les lettres placées sur les arêtes.

Déf. 11. Un angle polyèdre est dit *convexe*, s'il est situé tout entier d'un même côté de chacune de ses faces, prolongée indéfiniment dans tous les sens.

Tout système de plans qui détermine un angle polyèdre en détermine un second qui, réuni au premier, occupe tout l'espace autour du sommet commun. Dans le cas où l'un des deux est convexe, ce sera ordinairement de celui-ci qu'il s'agira dans ce qui suit. Nous excluons les angles polyèdres dont les faces non adjacentes se coupent, quoique non prolongées.

PROPOSITION XXXI.

Théorème.

Tout trièdre, dont chaque face est moindre que deux angles droits, est convexe, et chacun de ses dièdres est <2 *droits; Au contraire, dès qu'un trièdre a une face plus grande que deux angles droits, il n'est pas convexe, et a des dièdres* >2 *droits.*

1° Soit (fig. 217) un trièdre ABCD, dont chaque face est moindre que deux droits. Considérant une des faces BAD, par exemple, prolongez-la indéfiniment, ainsi que l'arête AB vers B'. Puisque l'angle BAC est <2 droits, il est situé d'un côté de BB', et la face BAC d'un côté du plan indéfini BAD. Il en est de même de CAD. Le trièdre est donc tout entier d'un même côté du plan BAD ; par conséquent, le dièdre AB est aussi tout entier d'un même côté de ce plan ; donc il est <2 droits. Il en est de même de chaque face et de chaque dièdre. Donc le trièdre est convexe, etc.

2° Soit (fig. 217) un trièdre formé par les plans BEB'D, BAC, CAD, dont le premier est >2 droits. La face BAC prolongée coupe le premier plan suivant AB'. Il s'ensuit que ce plan BACB' divise le trièdre en deux parties, dont l'une est le dièdre CBB'E, l'autre le trièdre ACDB'. Donc le trièdre donné n'est pas situé tout entier d'un même côté de la face BAC prolongée, et n'est pas convexe. Le dièdre AB est coupé par le plan BCB' en deux parties, dont l'une, à gauche de ce plan, est égale à 2 droits ; donc il est$>$2 droits.

Remarque. Le même raisonnement prouve qu'un angle polyèdre quelconque est non convexe, s'il a une face plus grande que deux droits. Mais il est possible qu'un angle polyèdre de plus de trois faces soit non convexe, quoique chacune de ses faces soit < 2 droits. C'est ainsi que (fig. **218**) si l'on joint les quatre sommets d'un quadrilatère non convexe ABCD à un point E pris hors du plan de cette figure, on formera un angle polyèdre non convexe ; d'ailleurs chacune de ses faces est < 2 droits, puisque chacune est un angle d'un Δ. Un angle polyèdre ne peut pas avoir deux faces adjacentes dont chacune soit > 2 droits, sans que ces faces se coupent encore sur le prolongement de leur arête commune.

PROPOSITION XXXII.

Théorème. — Fig. 219.

Dans tout trièdre convexe ABCD, *la plus grande face* BAD *est moindre que la somme des deux autres.*

Dans le plan de la plus grande face BAD, faites l'angle EAD égal à CAD ; comme le trièdre est convexe, l'angle BAD est < 2 droits, et en joignant un point B de AB à un point D de AD, on aura un Δ BAD dont cet angle fera partie. La droite BD rencontre AE en un point E. Prenez AC=AE, tirez CD, CB. Les Δ EAD, CAD ont le côté AD commun, le côté AE=AC, l'angle EAD=CAD ; donc ils sont égaux, et l'on a ED=DC. Mais BD ou BE + ED < BC + CD ; retranchant d'un côté ED, de l'autre son égal CD, il vient BE < BC. Les deux Δ ABE, ABC, qui ont AB commun, AE=AC, ont donc BE < BC ; par suite, l'angle BAE < BAC (l. 1). Ajoutant d'un côté EAD, de l'autre son égal CAD, on a BAD < BAC + CAD, *c. q. f. d.*

Remarque. On peut donc dire que dans un trièdre convexe, chaque face est moindre que la somme des deux autres.

PROPOSITION XXXIII.

Théorème.

Les perpendiculaires menées sur les faces d'un trièdre convexe, à partir d'un point intérieur, déterminent un second trièdre dont les faces sont respectivement supplémentaires des sections droites des dièdres du premier, et réciproquement.

Soit d'abord (fig. 220) un dièdre AB moindre que 2 droits; d'un point C pris dans l'intérieur, soient menées sur les faces respectives les perpendiculaires CD, CE ; soient D, E leurs traces. Le plan ECD sera perpendiculaire au plan AD, puisque celui-là passe par CD, qui est perpendiculaire à celui-ci. De même le plan ECD sera perpendiculaire au plan AE; donc le plan ECD, perpendiculaire à la fois aux plans AD, AE, qui se coupent, l'est à leur intersection, et détermine dans le dièdre donné une section droite EBD. Or, la droite CD, perpendiculaire au plan AD, l'est à la droite BD menée dans ce plan, de même CE l'est à BE. Par conséquent, les angles E, D, du quadrilatère BDCE sont droits; donc l'angle C est supplémentaire de la section droite EBD.

Soit ensuite (fig. 221) un trièdre convexe A; d'un point intérieur *a* soient menées sur les faces BAC, BAD, DAC, les perpendiculaires *ad*, *ac*, *ab*. D'après ce qui vient d'être prouvé, les trois angles *dac*, *dab*, *eab*, sont supplémentaires des dièdres AB, AC, AD (c'est-à-dire de leurs sections droites). D'ailleurs le plan *cab* est, comme on l'a prouvé, perpendiculaire à AD, le plan *cad* à AB, et le plan *dab* à AC; donc ces trois plans sont distincts, sans quoi on pourrait d'un point A mener plus d'une perpendiculaire à un plan; en outre les arêtes du trièdre A étant perpendiculaires aux faces de *a*, les faces du premier sont aussi supplémentaires des dièdres du second, et l'on remarquera que la face qui, dans chaque cas, est supplémentaire d'un dièdre, est celle qui est perpendiculaire à l'arête de ce dièdre.

Remarque. Rien n'empêche de supposer que les trois

plans *dac*, *bac*, *bad* rencontrent les arêtes respectives AB, AD, AC, du même côté du sommet A, de sorte que le point A sera aussi dans le trièdre *a*.

DÉF. 12. Deux trièdres A, *a* sont dits *supplémentaires*, si chacun a ses faces supplémentaires des dièdres de l'autre, de façon que la face BAC étant supplémentaire du dièdre *ad*, le dièdre AD, opposé à celle-là, est aussi supplément de la face *bac* opposée à celui-ci.

DÉF. 13. Un trièdre est dit *isocèle*, s'il a deux faces égales ; il est *équiangle*, s'il a les trois faces égales.

PROPOSITION XXXIV.

THÉORÈME. — FIG. 222.

Dans un même trièdre, les dièdres opposés à des faces égales sont égaux, et réciproquement.

1° Soient, dans le trièdre ABCD, les faces égales BAC, CAD. Prolongez les arêtes au delà du sommet vers B', C', D'. Comparant le nouveau trièdre AB'C'D' avec le premier, on aura les dièdres AB=AB', AC=AC', AD=AD' (p. 22); face B'AC'=BAC, de plus=CAD=C'AD', BAD=B'AD'.

Cela posé, faites tourner le trièdre AB'C'D' pour le renverser sur ABCD, le sommet A restant commun, et l'arête AC' tombant sur AC, les dièdres AC', AC étant égaux, leurs faces indéfinies coïncideront ; d'ailleurs les quatre faces adjacentes à ces deux dièdres sont égales ; donc AB' tombe sur AD, AD' sur AB et les trièdres se superposent. Il s'ensuit que dièdre AB'=AD ; mais AB'=AB. Donc les dièdres AB, AD, opposés aux faces égales, sont égaux.

2° Soit le dièdre AB=AD ; faisant la même construction que ci-dessus, on pourra placer AB' sur AD, AD' sur AB; les quatre dièdres AB', AB, AD, AD' étant égaux, AB' coïncide avec AB, AD' avec AB', les deux figures se superposeront, et face B'AC'=DAC ; mais B'AC'=BAC. Donc BAC=DAC, etc.

Corollaire. 1° Dans un trièdre isocèle, les dièdres opposés aux faces égales, sont égaux, et réciproquement.

2° Dans un trièdre équiangle, les dièdres sont égaux, et réciproquement.

PROPOSITION XXXV.

Théorème.

Dans un même trièdre, la plus grande face est celle qui est opposée à un plus grand dièdre, et réciproquement (Démonstration analogue à celle de pr. 13, l. 1).

Déf. 14. Dans deux angles polyèdres, composés de faces égales deux à deux, assemblés dans le même ordre, j'appellerai dièdres *homologues* ceux qui sont compris de part et d'autre par des faces égales ; les arêtes *homologues* seront celles qui sont de part et d'autre à l'intersection de faces égales.

PROPOSITION XXXVI.

Théorème. — Fig. 223.

Un trièdre ABCD *étant donné, il en existe un second qui a les mêmes faces, adjacentes aux mêmes dièdres, mais qui ne peut se superposer avec le premier que si celui-ci est isocèle.*

Prolongez au delà du sommet A les faces du trièdre proposé ; elles détermineront un nouveau trièdre ayant les faces et les dièdres respectivement égaux à ceux de ABCD. Prenez de plus l'arête AB′=AB, AC′=AC, AD′=AD. La droite CC′ perce le plan BDB′D′ en A, de sorte que AC est située d'un côté de ce plan, AC′ de l'autre. Si donc on fait tourner le trièdre autour de A, de façon que le point B′ décrive autour de ce point, et dans le plan BDB′D′ la demi-circonférence B′KB, et D′ la demi-circonférence D′LD dans ce même plan, les arêtes AB′, AD′ coïncideront avec leurs homologues, ce qui est possible, vu que face BAD=B′A′D′; mais l'arête AC′ restant *derrière* le plan BDB′ ne coïncidera pas avec AC, qui

est *en avant* de ce plan. Ainsi la superposition n'aura pas lieu.

Que si on veut renverser AB'C'D' du haut en bas, de façon que AB' tombe sur AD, AD' sur AB; la face B'AD' coïncidera encore avec son égale BAD, et les arêtes AC', AC seront du même côté de ce plan; mais le dièdre AB' n'est égal à AD que si le trièdre donné est isocèle. Car si dièdre AB'=AD, comme dièdre AB= aussi AB', AB serait égal à AD, ce qui rend le trièdre isocèle (p. 34). Donc, dans le cas contraire, la coïncidence n'a pas lieu.

DÉF. 15. Deux trièdres qui présentent les relations précédentes sont dits *inverses*. On peut former l'un en mettant l'autre à l'*envers*.

PROPOSITION XXXVII.

THÉORÈME. — FIG. 224.

Deux trièdres ABCD, A'B'C'D' *sont égaux ou inverses s'ils ont une face égale* (BAD=B'A'D'), *adjacente à deux dièdres égaux chacun à chacun* (AB=A'B', AD=A'D').

Construisez le trièdre *Abcd*, inverse de ABCD, et pour superposer les deux trièdres proposés, placez la face B'A'D' sur BAD, de façon que l'arête A'B' tombe sur AB, A'D' sur AD. Si les plans B'A'C', BAC tombent du même côté du plan BAD, ces deux plans coïncideront, puisque les dièdres AB, A'B' sont égaux. De même le plan C'A'D' tombera sur CAD, et par suite l'arête A'C' sur AC. Donc les deux trièdres sont égaux dans tous leurs éléments.

Si dans la superposition, les plans BAC, B'A'C' ne tombent pas du même côté de BAD, on superposera A' avec *Abcd*.

PROPOSITION XXXVIII.

THÉORÈME. — FIG. 224.

Deux trièdres sont égaux ou inverses, s'ils ont un dièdre égal compris entre des faces égales chacune à chacune. (On raisonne à peu près comme pr. 37.)

PROPOSITION XXXIX.

THÉORÈME. — FIG. 225.

Deux trièdres sont égaux ou inverses, s'ils ont deux faces égales (BAC=B'A'C', CAD=C'A'D'), *et un dièdre opposé à l'une de ces faces aussi égal* (AB=A'B'), *pourvu que les dièdres* (AD, A'D') *opposés à l'autre face égale soient de même espèce,* sauf un cas d'exception.

Placez le trièdre A (ou son inverse) sur A'B'C'D', de façon que la face BAC coïncide avec son égale B'A'C', le dièdre AB avec A'B'; je dis que le plan CAD coïncidera avec C'A'D'; car supposons que le plan CAD coïncide avec un autre C'A'E, on aurait angle C'A'E=CAD, et par suite = C'A'D'. Donc le trièdre A'C'D'E serait isocèle, et le dièdre A'E, qui est déjà égal à AD, le serait au dièdre C'A'D'E. Or si le dièdre AD est < 1 droit, il en sera de même de C'D'AB', puisqu'ils sont de même espèce; donc les deux dièdres adjacents sur A'D', qui sont supplémentaires, seraient tous deux < 1 droit, ce qui ne se peut. Même résultat, si le dièdre AD était > 1 droit.

Mais si le dièdre AD était droit, de même que A'D', si de plus les angles BAC, CAD étaient droits, AC et A'C' seraient perpendiculaires aux faces opposées, et CAD pourrait ne plus coïncider avec C'A'D'. Et en effet, si (fig. 226) une droite AC est perpendiculaire à un plan BAE, et par suite à toutes les droites AB, AD, AE, menées dans ce plan, les trièdres ABCD, ABCE, ABCF, etc., ont tous la face BAC commune,

les faces CAD, CAE, CAF, etc., égales, le dièdre AB, opposé à ces faces, aussi égal, sans être pourtant égaux.

PROPOSITION XL.

Théorème.

Deux trièdres sont égaux ou inverses, s'ils ont deux dièdres égaux chacun à chacun, et une face opposée à l'un d'eux égale, pourvu que la face opposée au second dièdre égal, soit de même espèce de part et d'autre, sauf un cas d'exception.

Nommons A une face de l'un, A' son égale dans l'autre ; soient *a*, *a'*, les sections droites des dièdres opposés ; elles sont égales ; soient *b*, *b'*, celles des deux autres dièdres égaux, B, B' les faces opposées, qui sont de même espèce, tous ces $\wedge$ étant rapportés à l'angle droit.

Considérez les trièdres supplémentaires des nôtres (p. 33 et d. 12) : ils auront deux faces égales chacune à chacune, représentées par 2—*a*, 2—*a'*, 2—*b*, 2—*b'*; de plus, les dièdres opposés aux deux premières, 2—A, 2—A', seront égaux, et les dièdres opposés aux deux autres faces, c'est-à-dire 2—B, 2—B', sont de même espèce. Ainsi ils sont égaux dans tous leurs éléments, sauf le cas où les faces 2—*a*, 2—*a'*, 2—*b*, 2—*b'* sont des angles droits. Donc nos trièdres sont aussi égaux, sauf le cas où les quatre dièdres *a*, *a'*, *b*, *b'* sont droits.

PROPOSITION XLI.

Théorème. — Fig. 227.

Deux trièdres ABCD, A' *sont égaux ou inverses, s'ils ont les faces égales chacune à chacune* (les faces de même nom).

Placez la face B'A'D' sur son égale BAD, de façon que les arêtes homologues coïncident. Si l'arête A'C' tombe du même côté que AC, par rapport au plan BAD, au lieu du trièdre A', on prendra son inverse, et opérant de même,

on aura le trièdre ABED, égal à A′, ou inverse de A′. Ainsi $\wedge$ BAE = BAC, EAD = CAD. Si donc on imagine le plan ACE, chacun des trièdres ABCE, ACDE est isocèle. Donc dièdre BAEC = BACE, et dièdre DAEC = DACE. Ajoutant ou retranchant selon que le plan CAE passe entre BA et AD, ou non, on a dièdre BACD = BAED = A′C′. Donc les trièdres proposés ABCD et A′ ont un dièdre égal entre faces égales, et sont égaux ou inverses.

Si le plan CAE passait par AB, le dièdre BCAD se changerait en ECAD, et la conséquence serait la même.

PROPOSITION XLII.

Théorème.

Deux trièdres sont égaux ou inverses, s'ils ont les dièdres égaux chacun à chacun.

Soient A, B, C, les faces de l'un, a, b, c, les dièdres opposés ou plutôt leurs sections droites; de même A′, B′, C′, les faces, a', b', c' les sections droites des dièdres de l'autre. Soit $a=a'$, $b=b'$, $c=c'$. Construisez les supplémentaires des deux trièdres (p. 33 et d. 12); leurs faces seront respectivement $2-a$, $2-b$, $2-c$; $2-a'$, $2-b'$, $2-c'$, et ces faces seront égales chacune à chacune. Donc les dièdres opposés aux faces égales sont égaux. Mais ces dièdres ont pour sections droites respectives 2—A, 2—B, etc., et comme 2—A = 2—A′, on aura A = A′, B = B′, C = C′. Donc, etc.

PROPOSITION XLIII.

Théorème. — Fig. 228.

Dans tout angle polyèdre convexe, la somme des faces est moindre que quatre angles droits.

On va démontrer en premier lieu que dans un pareil angle on peut mener, d'une infinité de manières, un plan qui rencontre toutes les arêtes supposées terminées au sommet.

Pour le trièdre, cela est évident, car trois points, pris respectivement sur les trois arêtes, déterminent un tel plan. Pour tout autre angle polyèdre A, supposé convexe, si l'on prolonge indéfiniment le plan d'une face quelconque, ACD, l'angle polyèdre sera situé tout entier d'un côté de ce plan. Il en est de même par rapport à une face opposée AFE; donc ces deux plans comprennent dans leur dièdre tout l'angle polyèdre. Ce dièdre est moindre que 2droits; s'il était plus grand, l'un quelconque des deux plans qui le forment étant prolongé, passerait dans l'intérieur du dièdre, couperait l'angle polyèdre qui, par suite, ne serait pas situé tout entier d'un même côté de l'une quelconque de ses faces, prolongée dans tous les sens. Le dièdre en question ne peut pas non plus se réduire à 2 droits, c'est-à-dire que les deux faces opposées CAD, FAE ne peuvent pas être dans un même plan ; car (fig. 229) si cela était, chacun des angles CAD, FAE serait moindre que 2 droits (p. 31, r.); d'après cela, entre AF et AC il doit se trouver au moins deux faces ; s'il n'y en avait qu'une, ce serait FAC, et les trois faces EAF, FAC, CAD n'en feraient qu'une, ce qui est contraire à l'hypothèse. Il y a donc au moins deux faces, que le plan FEDC laissera ou de l'autre côté par rapport à l'angle polyèdre, ou du même côté que l'angle polyèdre. Dans le premier cas, ce plan couperait l'angle polyèdre ; dans le second, chacune des deux faces en question le couperait ; aucun de ces deux cas ne convient à un angle polyèdre convexe. Donc enfin notre angle polyèdre convexe (fig. 228) est compris dans l'angle dièdre des faces CAD, EAF, angle moindre que 2 droits.

L'intersection de ces faces est une droite GH extérieure à l'angle polyèdre, vu qu'elle appartient à deux plans dont aucun ne passe dans cet angle. Or, par cette droite GH, on peut mener d'une infinité de manières un plan qui ne passe point dans le dièdre des faces CAD, EAF, dièdre moindre que 2 droits. Ce nouveau plan laisse donc d'un même côté ce dièdre tout entier, ainsi que l'angle polyèdre y compris, et tout plan qui lui sera parallèle, et mené par un point B d'une des arêtes, les coupera toutes du même côté du sommet.

Soit BCDEF la section faite dans l'angle polyèdre par un pareil plan : cette section sera un polygone convexe ; car si l'un de ses côtés, BC, traversait le polygone, la face ABC traverserait l'angle polyèdre. On peut donc regarder chacun des sommets B, C, D, etc., comme celui d'un trièdre convexe, ayant parmi ses faces un des angles de ce polygone. Par suite (p. 32), angle FBC<FBA+ABC, BCD<BCA+ACD, etc. Donc la somme des angles intérieurs du polygone est moindre que la somme des angles qui leur sont adjacents dans les Δ assemblés autour de A. Or, si d'un point intérieur O du polygone on mène des droites OB, OC, etc., à tous les sommets, on aura autant de Δ en O qu'en A : la somme totale des angles du premier système de Δ est ainsi la même que dans le second ; mais dans le second, les angles en B, C, D valent plus que dans le premier ; donc, par compensation, dans le second les angles en A vaudront moins que dans le premier les angles en O, c'est-à-dire moins que 4 droits.

Remarque. Si l'angle polyèdre n'est pas convexe, la somme de ses faces peut être >4 droits. Car, d'abord, il n'est pas toujours possible de mener un plan qui coupe toutes les faces suivant un polygone fermé ; on le voit dans le trièdre non convexe de la figure 217, où le plan BCD coupe deux faces suivant BC, CD, et la troisième suivant DI, BH, prolongements de BD. Ensuite, même dans le cas où il est possible de couper l'angle suivant un polygone fermé, ce polygone ne sera pas convexe, sans quoi l'angle le serait. Or (fig. 230), soit A le sommet d'un angle polyèdre, BCE le polygone non convexe obtenu. Dans le trièdre G, on a, il est vrai, face BGF< AGB + AGF ; mais la face BGF, moindre que 2 droits, n'est pas un angle du polygone ; c'est l'angle mesuré par l'arc *abc*, qui fait partie du polygone, et cet angle-là peut être >AGB+AGF. Le raisonnement employé dans le théorème n'est donc pas applicable ici.

PROPOSITION XLIV.

Théorème.

Dans tout angle polyèdre convexe, la somme des dièdres est moindre que deux droits multipliés par le nombre des faces, mais plus grande que ce même produit diminué de quatre droits.

1° En effet, dans un angle polyèdre convexe, chaque dièdre est moindre que deux droits; donc leur somme est moindre que deux droits multipliés par le nombre des faces.

2° Soit d'abord un trièdre convexe : chacun de ses dièdres vaut 2 droits moins une des faces du trièdre supplémentaire. Par suite, ses trois dièdres valent 6 droits moins les trois faces de ce dernier trièdre, qui est aussi convexe, et dont la somme des faces est par conséquent moindre que 4 droits. Or, de 6 droits retranchant moins de 4, on a un reste plus grand que 2 droits; de sorte que dans un trièdre convexe, la somme des dièdres est $>$2 droits.

Soit maintenant (fig. 228) un angle polyèdre convexe, quelconque A. Par une droite intérieure AO, et par chaque arête AB, AC, menez un plan, ce qui donnera autant de trièdres AOBC, AOCD, etc., qu'il y a de faces. La somme de leurs dièdres est donc plus grande que 2 droits multipliés par le nombre des faces; retranchant les 4 droits formés autour de AO, on a un reste plus grand que ledit produit diminué de 4 droits.

Remarque. On ne peut pas prendre arbitrairement les trois dièdres d'un trièdre. En effet, soient A, B, C, ces trois dièdres, ou leurs sections droites; soit D l'angle droit. Les faces du trièdre supplémentaire seront $2D-A$, $2D-B$, $2D-C$. Soit A le plus petit des trois angles A, B, C; $2D-A$ sera la plus grande des trois faces du trièdre supplémentaire. Il faut donc qu'elle soit $<$ la somme des deux autres, c'est-à-dire que $2D-A<2D-B+2D-C$.

D'où $$B+C<2D+A.$$

Ainsi il faut que le plus petit dièdre augmenté de deux droits donne une somme plus grande que celle des deux autres dièdres.

Remarque. Un trièdre peut avoir deux et même trois dièdres droits; dans le premier cas, il se nomme trièdre *birectangle;* dans le second, *trirectangle*.

PROPOSITION XLV.

Théorème.

Avec des faces données, se succédant dans un ordre donné, et comprenant des dièdres donnés, on peut former au plus deux angles polyèdres, qui ne sont superposables que dans certains cas.

Afin que nos raisonnements conviennent d'une manière précise à toute espèce d'angle polyèdre, nous allons poser une *convention* relative à la manière de compter les dièdres. Soit (fig. 231) un système de faces BAC, CAD, etc., assemblées en A : plaçons en A la tête d'un spectateur ayant ses pieds en B, l'œil dirigé sur C; que ses pieds se meuvent pour se placer successivement en C, en D, mais avec la condition qu'il regarde devant lui, dans le sens du mouvement, la tête restant en A : lorsqu'il sera en D, sa *droite* aura parcouru l'un des dièdres que forment les faces BAC, CAD, sa gauche, l'autre. Le premier sera dit *compté à droite*, l'autre à *gauche*. L'un, celui de gauche ou de droite, sera $<$ 2 droits, l'autre plus grand, et dans les angles polyèdres non convexes, chacune de ces deux espèces de dièdre peut se rencontrer. Or, dans un même angle polyèdre nous compterons tous les dièdres à gauche, ou tous à droite ; mais jamais, dans le même angle, les uns à gauche, les autres à droite.

Cela posé, soit donné un système de faces, que nous nommerons 1re, 2e, 3e face, dans l'ordre où elles doivent se suivre ; soient donnés également les dièdres compris. Soit (fig. 232) BAC la première, plaçons notre spectateur, l'œil en A, les pieds en B, regardant *carrément* le point C. Il s'agit de placer sur

AC la seconde face, faisant avec la première un dièdre donné. Or, ici ce dièdre peut être formé à *droite* ou à *gauche* : soient CAD, CAD′ les deux positions qui en résultent pour la seconde face. Il faudra placer sur AD la troisième face comprenant avec la seconde un dièdre donné; mais cette troisième face ne pourra avoir qu'une position ; car le premier dièdre étant pris à gauche, le second devra l'être. Donc ce premier assemblage de faces sera unique; le second, qui se continue sur AD′ avec les dièdres à droite, sera aussi unique. Donc il n'y en a que deux. Et si un troisième assemblage des mêmes faces et dièdres, disposés dans le même ordre, était donné, on placerait la première face sur son égale BAC, par les arêtes homologues; la seconde ne pourrait tomber qu'à droite ou à gauche ; donc elle coïnciderait avec CAD ou avec CAD′, et ce nouveau système coïnciderait avec l'un des deux premiers.

Que si l'un des angles polyèdres est formé, soit (fig. 233) ABCDEF cet angle; prolongez toutes ses arêtes et faces au delà du sommet, *Abcdef* sera le second. Car il aura les faces et les dièdres respectivement égaux à ceux du premier. De plus, pour pouvoir les superposer par les faces homologues, il faudrait placer *b*A sur BA, A*c* sur AC, A*f* sur AF, c'est-à-dire superposer le trièdre ABCF avec A*bcf*, ce qui ne se peut, vu que ces deux trièdres sont inverses. Quant aux conditions nécessaires pour que la superposition puisse avoir lieu, les voici : admettons que la face *d*A*c* soit superposée avec son égale DAC : il faudra placer A*c* sur AD, A*d* sur AC, sans quoi les deux figures tomberaient de différents côtés du plan commun CAD. Il faudra donc que dièdre A*c* =AD, et face *c*A*b*=DAE ; or, déjà dièdre A*c*=AC, et face *c*A*b*=CAB ; donc il faut que dièdre AC=AD, face CAB= EAD, etc., c'est-à-dire que de part et d'autre d'une certaine face CAD, ***il faut que les faces de même rang soient égales, et que les dièdres de même rang soient aussi égaux.*** Ces conditions suffisent évidemment.

Déf. 16. Deux angles polyèdres composés des mêmes faces et des mêmes dièdres, assemblés dans le même ordre, sont dits *inverses*, s'ils ne sont pas superposables.

PROPOSITION XLVI.

THÉORÈME. — FIG. 234.

Deux angles polyèdres inverses peuvent se décomposer en parties superposables.

Tout angle polyèdre convexe se décompose en trièdres additifs.

Deux angles polyèdres inverses se décomposeront en trièdres inverses; ce qui paraîtra évident, si on forme l'un par le prolongement des faces de l'autre au delà du sommet.

Il reste donc à démontrer la proposition pour deux trièdres inverses ABCD, AB'C'D', que je suppose opposés au sommet.

Prenons sur les arêtes des distances toutes égales, AB, AC, AB', etc. Tirons BD, BC, CD, B'D', B'C', C'D'. Soit E le centre du cercle circonscrit au Δ BCD, de sorte que les droites BE, DE, CE sont égales. Les Δ ABE, ACE, ADE seront équilatéraux entre eux, et par suite les trois trièdres ABEC, ADEC, ABED sont isocèles.

Cela posé, prolongez EA au delà de A; ce prolongement AE' déterminera, avec les arêtes AB', AC', AD', trois trièdres inverses des trois précédents, et superposables avec eux, respectivement (p. 36 et d. 15), puisqu'ils sont isocèles. Donc, etc.

Si le point E tombait sur un des côtés du Δ BCD, le trièdre ABCD ne serait décomposé qu'en deux trièdres isocèles; de même AB'C'D'. Enfin, si le point E tombait hors du Δ CBD, l'un des trois trièdres isocèles serait soustractif; de même dans AC'B'D', et la conséquence subsisterait.

Si les angles polyèdres ne sont pas convexes, on peut les décomposer en trièdres, en raisonnant comme dans la seconde partie de pr. 24, l. 1.

DÉF. 17. On appelle *polyèdre* tout corps terminé de toutes parts par des plans. Ces plans terminés à leurs intersections mutuelles, se nomment des *faces;* les intersections des faces prennent le nom d'*arêtes*.

Les points d'intersection des arêtes sont appelés *sommets.*

Une *diagonale* d'un polyèdre est une droite qui joint deux sommets non situés sur la même face.

Une *surface polyédrale* est une suite de plans terminés à leurs intersections mutuelles; la surface peut être fermée ou non.

DÉF. 18. On appelle *tétraèdre* le polyèdre à quatre faces: c'est le plus simple des corps terminés par des plans. On nomme *pentaèdre, hexaèdre, dodécaèdre, icosaèdre*, etc., les polyèdres à 5, 6, 12, 20, etc., faces.

Un tétraèdre est complétement déterminé par une face et le sommet opposé: si l'on considère une face sous ce point de vue, on l'appelle *base*.

DÉF. 19. Un polyèdre est dit *convexe*, s'il est situé tout entier d'un même côté de chacune de ses faces, prolongée indéfiniment.

PROPOSITION XLVII.

THÉORÈME.

Tout polyèdre peut se décomposer en tétraèdres additifs.

Si le polyèdre est convexe, l'œil placé à un sommet, et regardant l'intérieur, pourra voir toutes les faces. Dans ce cas, partagez en Δ toutes les faces, excepté celles qui sont adjacentes à un sommet A, pris à volonté, et regardez ces Δ comme les bases d'autant de tétraèdres ayant pour sommet commun le point A; ce sont les tétraèdres demandés.

On peut encore partager en Δ toutes les faces sans exception, prendre ces Δ pour bases d'autant de tétraèdres ayant pour sommet commun un point pris à volonté dans l'intérieur du polyèdre.

Si le polyèdre n'est pas convexe, supposez à un point intérieur quelconque A, l'œil d'un spectateur; il verra tout autour de lui un certain nombre de faces et de portions de faces; partagez-les en Δ et prenez-les pour bases d'autant de tétraèdres ayant pour sommet le point A. — Ces tétraèdres étant supprimés, il reste une ou plusieurs portions du

polyèdre que l'on traitera de même, et l'on arrivera à décomposer le corps en tétraèdres. Rien n'empêche d'ailleurs de prendre le point A au sommet d'un angle.

PROPOSITION XLVIII.

Théorème.

Dans tout polyèdre le nombre des faces, plus le nombre des sommets, moins le nombre des arêtes, est égal à 2.

Soit F le nombre des faces, S le nombre des sommets, A le nombre des arêtes.

Dans le tétraèdre $F=4$, $S=4$, $A=6$; ainsi, dans ce corps $F+S=A+2$.

Je dis qu'il en est de même pour tout polyèdre. En effet, supposons cette égalité vérifiée pour un certain polyèdre ; prenons un nouveau point M, pour le joindre à chacun des sommets d'une face, qui ait par exemple 8 côtés. On déterminera ainsi 8 faces nouvelles, en même temps qu'on en supprime une : il y a donc, dans le nouveau polyèdre, 7 faces de plus que dans l'ancien ; il y a un sommet de plus, et 8 arêtes de plus ; donc $F+S$ et A augmentent chacun de 8 unités, et la différence $F+S-A$ ne change pas. Il a été supposé qu'aucune des 8 nouvelles faces ne se trouve sur le prolongement d'une ancienne : si cela avait lieu pour une seule, il y aurait seulement 6 faces d'ajoutées ; mais il y aurait aussi une ancienne arête de supprimée ; donc on aurait ajouté 6 faces, un sommet, 7 arêtes, et la conclusion subsiste. Si 2 nouvelles faces se trouvaient chacune dans le prolongement d'une ancienne, il n'y aurait que 5 faces nouvelles, un sommet, et 6 arêtes nouvelles, etc. Donc $F+S-A$ est constant et égal à 2, dans tout polyèdre.

Remarque. On exclut ici les polyèdres étoilés où des faces non adjacentes à un même angle se coupent, comme on a exclu les polygones analogues.

PROPOSITION XLIX.

Théorème.

Dans tout polyèdre la somme des angles des faces est égale à quatre angles droits multipliés par S—2, S *étant le nombre des sommets.*

Soient n_1, n_2, n_3,... les nombres de côtés des différentes faces : on aura la somme de leurs angles $= 2(n_1-2) + 2(n_2-2) + 2(n_3-2) +$, etc.

$$=2(n_1+n_2+n_3+, \text{etc.}, -2-2-2-), \text{etc.}$$

Conservons les notations de pr. 48 ;

$n_1+n_2+n_3+.....$ est le nombre de tous les côtés des faces : c'est 2 A. Le nombre 2 est pris soustractivement, autant de fois qu'il y a de faces; donc la somme des $\wedge = 2(2A-2F) = 4A - 4F = 4(A-F)$;

mais de $F+S-A=2$ on tire $A-F=S-2$;

et la somme des $\wedge = 4(S-2)$.

Remarque. Pour déterminer un polyèdre de S sommets, je prends 3 sommets A, B, C situés sur une face ; il en reste S—3, que je nomme D, E, F... Je détermine chacun de ces sommets par le moyen d'un tétraèdre, ce qui conduit aux tétraèdres DABC, EABC, etc. Or, la connaissance du Δ ABC, entraîne celle de 3 éléments; la détermination de chacun des tétraèdres DABC, etc., en exige 3 (par exemple, les 3 dièdres à la base): total 3. (S—3) + 3=3 (S—2) éléments et l'ordre dans lequel ils se combinent. Il peut se faire que plusieurs des sommets D, E, F soient dans le plan ABC, ce qui sera exprimé par ce que les tétraèdres correspondants deviendront des plans.

PROPOSITION L.

Théorème. — Fig. 235.

Deux figures sont égales, si on peut les placer de façon

qu'à chaque point A, B, C, *etc., de l'une, il réponde dans l'autre un point* A′, B′, C′, *etc., tel que les droites* AA′, BB′, CC′, etc., *soient égales, parallèles, et de même sens par rapport aux lignes* AB, BC, *etc.*

Menez un plan MN parallèle aux droites AA′, BB′, etc., mais quelconque d'ailleurs. Projetez les points A, B, A′, B′, etc., sur ce plan en a, b, a', b', etc. Tirez aa', bb', ab, bc, $a'b'$ bc'; aa' sera parallèle à AA′ (p. 12, r.) : de même bb', cc'. De plus aa'=AA′, comme parallèles entre parallèles. Donc les figures abc, $a'b'c'$ sont égales et superposables (l. 1, p. 30). Si on les superpose, les perpendiculaires aA, bB, cC, coïncideront avec a'A′, b'B′, c'C′, vu que d'ailleurs Bb = B′b', Aa = A′a', etc. Donc chaque point A,B,C, de l'une des figures données coïncide avec un point A′, B′,C′ de l'autre.

. *Corollaire* 1. Si les figures sont des polygones, ou des polyèdres, il suffit que les conditions précédentes aient lieu pour les sommets des deux figures, pourvu que les côtés, les faces soient de part et d'autre déterminés par les sommets correspondants.

Corollaire 2. 1° *Deux angles sont égaux ou supplémentaires, si les côtés de l'un sont parallèles à ceux de l'autre respectivement.* Car (fig. 236) soit AB parallèle à A′B′, AC à A′C′; prenez AB=A′B′, AC=A′C′; AB A′B′ sera un ▱; donc AA′=BB′ ; de même AA′=CC′. Donc, etc.

Si l'on prolonge A′C′ vers C″, l'angle B′A′C″ sera supplément de BAC; et si l'on prolonge A′B′ vers B″, angle B″A′C″ sera =BAC.

2° Fig. 237. *Deux angles polyèdres sont égaux si les arêtes de l'un sont parallèles à celles de l'autre, et respectivement de même sens, et si, de plus, les faces sont déterminées de part et d'autre par des arêtes parallèles deux à deux.*

Supposons que les arêtes de même nom soient parallèles, AB à A′B′, etc. Prenez AB=A′B′, AC=A′C′... Tirez AA′, BB′, CC′... Ces droites seront égales et parallèles. Donc, etc.

Prolongez les arêtes A'B', A'C', etc., vers B'', C'', etc., l'angle A'B''C''... sera inverse de A'B'C'...; donc aussi de ABC...

Remarque. En étendant à l'espace les définitions relatives à la similitude (l. 3), il s'ensuit que la pr. 15, l. 3 et ses corollaires sont vrais pour toute espèce de figures, planes ou non. La seule partie qui jusqu'ici ne se trouvait pas démontrée est la dernière, celle qui est relative à la position du centre de similitude ; en vertu de la proposition actuelle (p. 50), elle se trouve établie. Il s'ensuit que la similitude des figures planes, situées dans des plans différents, est ramenée à ce qui a été dit, l. 3.

Déf. 20. — Fig. 238. On appelle *prisme* un polyèdre dont deux faces opposées ABE, A'B'E' sont égales et parallèles, les autres faces ABB'A', BCC'B', etc., étant des ▱, qu'on appelle *faces latérales*.

Pour construire un prisme sur une base donnée ABCDE, par les sommets A, B, C, D, E, menez dans le même sens les droites AA', BB', CC', DD', EE', égales et parallèles ; joignez les extrémités A', B', C', D', E' dans le même ordre que A, B, C, D, E. La figure A'B'C'D'E' sera égale à ABCDE (p. 50), et les figures ABB'A', etc., sont des ▱. Donc, etc.

L'ensemble des faces latérales indéfiniment prolongées dans le sens des arêtes latérales, s'appelle un prisme *indéfini*.

La *hauteur* d'un prisme est la distance des plans des bases.

Déf. 21. Le prisme est appelé *droit* si les *arêtes latérales* AA', BB', etc., sont perpendiculaires aux bases. Dans ce cas, les *faces latérales* AB', BC', etc., sont aussi perpendiculaires aux bases. La hauteur d'un prisme droit est égale aux arêtes latérales.

Déf. 22. Un prisme est appelé *triangulaire*, *quadrangulaire*, *pentagonal*, etc., selon que ses bases sont des triangles, des quadrilatères, des pentagones, etc.

Remarque 1. Un prisme est évidemment déterminé par la base, la longueur d'une arête, et sa direction par rapport à la base.

Remarque 2. — Fig. 238. *Les sections* KLMNO, PQRST *faites dans un prisme par des plans parallèles sont égales,* vu que les droites KP, LQ, etc., qui joignent les sommets, sont égales et parallèles (p. 19 et 50). On en conclut que les sections parallèles aux bases leur sont égales.

Déf. 23. Dans un prisme indéfini ou non, on appelle *section droite* la section faite par un plan perpendiculaire aux arêtes.

Déf. 24. — Fig. 239. Le *parallélipipède* (⊠) est un prisme dont les bases ABCD, EFGH, sont des ▱. Ce corps est donc compris sous six ▱.

Déf. 25. Si le ⊠ est droit, et que ses bases soient des rectangles, toutes les faces sont des rectangles, et le polyèdre se nomme ⊠ *rectangle.*

Déf. 26. Enfin, si dans un ⊠ rectangle les bases sont des carrés, ainsi que les faces latérales, la figure se nomme *cube.*

Remarque. — Fig. 239. *Dans un* ⊠ *deux faces opposées quelconques* ABFE, DCGH *sont égales et parallèles.* Car les droites AD, BC, EH, FG sont égales et parallèles, vu que les bases FH, AC, sont des ▱ égaux. Donc (pr. 50), etc., et on peut prendre pour bases deux faces opposées quelconques.

PROPOSITION LI.

Théorème. — Fig. 240.

Si un polyèdre convexe est enveloppé partout par un second polyèdre convexe ou non, la surface du premier est moindre que celle du second.

Pour le prouver, je dis 1° qu'une aire plane rectiligne est moindre que sa projection sur un plan non parallèle au sien, et comme une pareille aire se décompose en Δ, il suffira de considérer un Δ.

Soit (fig. 301, pl. 10) un Δ ABC, A'B'C' sa projection sur un plan non parallèle au sien. Je suppose d'abord qu'un côté AC du Δ soit parallèle au plan de projection, et par suite à sa projection A'C', située à la fois dans ce der-

nier plan et dans le plan AC, C'A' qui contient AC (p. 12). Par suite AA' = CC'. Prenez aussi B'B'' = AA', tirez AB'', B''C; les Δ A'B'C', AB''C seront égaux (p. 50), et le plan AB''C sera parallèle à A'B'C' (p. 19). Ainsi BB' perpendiculaire à ce dernier, le sera à AB''C (p. 17). Soit menée B''D perpendiculaire à AC, et soit tiré BD; BD sera aussi perpendiculaire à AC (p. 8). Donc B''D, BD sont les hauteurs des Δ AB''C, ABC, qui ont même base AC. Or BB'', perpendiculaire au plan AB''C, l'est à B''D; donc DB est une oblique et surpasse DB''; donc Δ ABC > AB''C ou > A'B'C'.

Si le Δ ABC n'a aucun côté parallèle au plan A'B'C', des trois plans menés par A, B, C, parallèlement à A'B'C', il y en aura un qui sera situé entre les deux autres; mettons que c'est le plan mené par A. Il coupera BC entre B et C, en un point E, et le plan BAC en une droite AE, parallèle au plan A'B'C'; chacun des Δ ABE, ACE ayant ainsi un côté AE parallèle au plan de projection, sera plus grand que sa projection. Donc, etc.

2° Je dis que dans tout polyèdre fermé une face A est plus petite que la somme des autres. Projetez toutes les autres faces sur le plan de A : la somme des projections sera au moins égale à A ; mais la somme des faces projetées est plus grande que celle de leurs projections; donc la somme des faces > A.

3° Soit enfin un polyèdre convexe P enveloppé par un polyèdre P', ayant ou non des faces communes avec P. Prolongez indéfiniment le plan d'une face de P; elle coupera P' suivant un polygone que je nomme A, et laissera P tout entier d'un côté : soit P'' la partie de P' qui est de ce même côté de A, P''' l'autre. P''' forme avec A un polyèdre où A < P''', d'après 2°. Donc remplaçant P''' par A, on aura le polyèdre AP'' dont l'aire < P', et qui enveloppe P, avec lequel il a un plan de face commun. Opérant de même sur P et AP''', on remplace P' par des polyèdres dont les aires vont en décroissant, et dans lesquels il y a successivement 1, 2, 3... faces communes. Le dernier de ces polyèdres à aires décroissantes sera P. Donc aire P < P'.

Corollaire. La même propriété a lieu si P et P′, au lieu d'être fermés, se terminent à un contour polygonal commun.

Nous admettons qu'une portion de plan est plus petite que toute surface courbe terminée au même contour. On pourra donc, par un raisonnement analogue à celui de la rem. 1, p. 28, l. 1, étendre la pr. actuelle à des surfaces courbes.

DÉF. 27. Deux points sont dits *symétriques* par rapport à un plan, si le plan est perpendiculaire au milieu de la droite qui joint ces points.

Les définitions données l. 1, page 31, pour les points et figures symétriques par rapport à un point ou une droite, seront conservées dans l'espace.

DÉF. 28. Deux figures, systèmes de points, de lignes, de surfaces, de corps, sont *symétriques* par rapport à un plan, si chaque point de l'une des figures a dans l'autre son symétrique par rapport à ce plan.

PROPOSITION LII.

THÉORÈME. — FIG. 239.

Dans tout ⊞ AG, *les diagonales se coupent en leur milieu commun, lequel est un centre de symétrie de la surface de ce polyèdre.*

Soient tirées les diagonales AG, BH; les droites AB, GH étant parallèles, déterminent un plan, et comme elles sont égales, elles déterminent (l. 1, p. 26) un ▱, dont AG, BH sont les diagonales, lesquelles se coupent par conséquent en parties égales ; soit I leur intersection. On prouve de même que les deux autres diagonales, EC, DF, passent par le milieu de AG, et y sont divisées en parties égales.

Soit actuellement tirée par I une droite quelconque LK, ayant L et K pour traces sur deux faces opposées AC, HF du polyèdre. Menez GL, AK, droites qui seront parallèles à cause des plans parallèles BD, FH, coupés par le plan AKLG.

Les Δ AIK, GIL auront le côté AI=IG, l'angle AIK=GIL, IAK=IGL. Donc IL=IK; donc, etc.

PROPOSITION LIII.

Théorème.

Deux figures symétriques par rapport à une droite sont superposables.

Pour démontrer cette propriété, on projettera les deux figures (comme pr. 50) sur un plan, mais on prendra ce plan perpendiculaire à l'axe de symétrie; les projections seront symétriques par rapport à un point, etc.

PROPOSITION LIV.

Problème. — Fig. 241.

Toutes les figures symétriques d'une figure donnée, soit par rapport à un point, soit par rapport à un plan, sont superposables entre elles.

Soit A un point d'une figure; A′ son symétrique par rapport à un plan EF; tirez AA′, et soit *a* la trace de cette droite sur EF : on aura (d. 27) A*a* = A′*a*. Soit pris le plan EF un Δ quelconque BCD, que nous prendrons pour base commune de deux systèmes de tétraèdres, ayant pour sommets les points A, A′, etc., des deux figures symétriques. Le plan EF étant perpendiculaire au milieu de AA′, on a AB=A′B, AC=A′C, AD=A′D (pr. 7). Donc les tétraèdres ABCD, A′BCD ont les faces égales chacune à chacune; par suite les trièdres BACD, BA′CD ont les faces égales 2 à 2; or, ils ont deux arêtes homologues communes, BC, BD; les arêtes BA, BA′ sont de différents côtés du plan commun; donc ils sont inverses (p. 36).

Cela posé, soit G un centre de symétrie, A″B′C′D′ la figure symétrique de ABCD, par rapport à G. On aura A″B′=AB =A′B, etc., BC=B′C′, etc. D'ailleurs les droites DB, D′B′

sont parallèles et de sens contraires relativement à BB′; de même BC, B′C′, et BA, B′A″. Donc le trièdre B′C′D′A″ est l'inverse de BCDA; donc il est superposable avec BCDA′ (pr. 45), et à cause des arêtes égales, le tétraèdre B′C′D′A″ coïncidera avec BCDA′.

Il s'ensuit que si l'on superpose B′C′D′ avec BCD, les points A″, A′, symétriques d'un même point A, coïncideront. Donc les deux figures symétriques de A... etc., sont superposables.

Donc ayant construit la symétrique d'une première figure par rapport à un plan, toutes les symétriques, de la première par rapport à un point, sont superposables avec la seconde, et de même toutes les figures symétriques d'une figure par rapport à un plan, sont superposables avec les figures symétriques de la première par rapport à un point. Donc, etc.

Corollaire 1. Toute figure symétrique d'une figure plane, soit par rapport à un plan, soit par rapport à un point, est superposable avec elle; car on peut prendre le centre de symétrie dans le plan de la figure donnée. Toute ligne symétrique d'une droite est droite.

DÉF. 29. Deux figures qui peuvent être symétriquement placées par rapport à un point, ou par rapport à un plan, sont dites *symétriques*, purement et simplement.

Remarque. Deux angles polyèdres inverses sont symétriques; car on peut former l'inverse d'un angle polyèdre en prolongeant les arêtes au delà du sommet, ce qui revient à construire le symétrique en prenant le sommet pour centre de symétrie.

PROPOSITION LV.

Toute figure symétrique d'un polyèdre est un second polyèdre ayant ses faces respectivement égales à celles du premier, et ses angles polyèdres respectivement inverses de leurs homologues dans le premier, et réciproquement.

1° Soit A une face de la figure donnée; la symétrique de cette face dans la seconde figure est superposable avec A; donc à chaque face de l'une répond une face égale dans l'autre; la seconde figure est donc un polyèdre.

Soit P un angle polyèdre dans l'un des corps; il y a dans le second son symétrique ou inverse, vu que si deux figures sont symétriques, chaque élément, partie de l'une, a son symétrique dans l'autre.

2° Deux polyèdres compris sous un même nombre de faces égales formant de part et d'autre des angles polyèdres égaux, sont évidemment superposables. Donc aussi deux polyèdres compris sous des faces égales, formant de part et d'autre des angles polyèdres symétriques, sont symétriques. Car chacun sera superposable avec le symétrique de l'autre.

Corollaire 1. — Fig. 242. Les deux prismes ABDA'B'D', BDCB'D'C', dans lesquels se décompose un ⊠ ACA'C', sont symétriques. Car les trièdres A, C' sont symétriques, comme ayant les arêtes respectivement parallèles et de sens contraire; ces trièdres sont compris sous des polygones égaux. De même des autres. Ces prismes ne sont pas symétriquement placés.

Remarque 1. On reconnaîtra facilement que : 1° dans le ⊠ rectangle, les plans menés par le centre de symétrie (p. 52) perpendiculairement à quatre arêtes, sont des plans de symétrie ; 2° dans le cube, outre ces trois plans, il y a encore six plans de symétrie, dont chacun passe par deux arêtes opposées parallèles.

Remarque 2. Une figure est superposable avec sa symétrique, si la figure proposée peut être divisée par un plan en deux parties symétriques par rapport à ce plan, ou encore si elle renferme un centre de symétrie. Dans le premier cas, nommons P le plan, A, A' les deux parties dans lesquelles il divise la figure. Pour construire la symétrique de notre figure, on peut prendre P pour plan de symétrie. Mais le lieu des points symétriques de A est alors A', et réciproque-

ment. Donc la symétrique de la figure coïncide avec cette figure. Raisonnement analogue pour le second cas.

PROPOSITION LVI.

Deux polyèdres symétriques sont décomposables en tétraèdres symétriques assemblés par les sommets d'angles symétriques, et réciproquement.

Décomposez l'un des polyèdres en tétraèdres; soient nommés A, B, C, D, les sommets de l'un de ces tétraèdres. Supposant les polyèdres symétriquement placés, on aura dans l'autre polyèdre les points A', B', C', D' symétriques de A, B, C, D; le tétraèdre A'B'C'D' sera donc symétrique de ABCD.

Pour démontrer la réciproque, on n'a qu'à construire le symétrique de l'un des polyèdres, et prouver qu'il est superposable avec l'autre.

Déf. 30. — Fig. 243. Une *pyramide* est un polyèdre compris sous plusieurs faces triangulaires SAB, SBC, SCD, SAD, partant toutes d'un même point S, et se terminant aux côtés d'un polygone plan ABCD, qu'on nomme la *base;* le point S est le *sommet* de la pyramide. L'ensemble des triangles SAB, SBC, etc., se nomme la *surface latérale de la pyramide.*

La *hauteur* d'une pyramide est la perpendiculaire abaissée du sommet sur le plan indéfini de la base.

Déf. 31. La pyramide est appelée *triangulaire, quadrangulaire, pentagonale,* etc., selon que la base est un triangle, un quadrilatère, un pentagone, etc. La pyramide triangulaire est un tétraèdre.

Remarque. La détermination de la pyramide par le moyen de ses éléments présente différents cas. Ainsi : deux pyramides sont égales, si elles ont 1° l'angle polyèdre au sommet égal, compris entre des arêtes homologues égales; 2° les bases égales, un angle trièdre à la base égal, et l'arête latérale adjacente égale, etc.

PROPOSITION LVII.

Théorème. — Fig. 243.

Les sections abcd, a'b'c'd', *faites dans une pyramide par des plans parallèles, sont semblables et semblablement placées par rapport au sommet* S *de la pyramide.*

Car *ab, a'b'* sont parallèles comme traces d'un plan SAB sur deux plans parallèles *abc, a'b'c'*; donc Sa:Sa'::Sb: Sb', etc. Donc les polygones *abcd, a'b'c'd'* sont semblables (I. 3, d. 5), etc.

Remarque. Si par S on conçoit un plan parallèle aux plans *a'c', ac,* que dans ce plan on prenne un point quelconque *m,* qu'on mène *mi* parallèle à *Sd*, et rencontrant les plans *ac, a'c'* prolongés en *k, i,* on aura *mk*=Sd, *ki*=*dd'* (p. 19); donc *mk*:*mi*::Sb:Sb', et *deux droites mi, Sd,* rencontrées par trois plans parallèles, sont coupées proportionnellement.

Déf. 32. On appelle *tronc de prisme* (fig. 238) la partie interceptée dans un prisme par une base AD, et une section KM non parallèle à cette base. Ces deux figures AD, KM sont appelées les *bases* du tronc.

Déf. 33. On appelle *tronc de pyramide* (fig. 243) le corps compris entre la base ABCD d'une pyramide, et une section quelconque *abcd* faite dans la pyramide. Les faces ABCD, *abcd* sont appelées les *bases*. Nous supposerons par la suite que ces bases sont parallèles ; leur distance s'appelle la hauteur du tronc.

Remarque. Soit ABCDEFGH un tronc de pyramide à bases parallèles ; si sur l'une des arêtes latérales AE, et sur la grande base ABCD, on construit un prisme, il est évidemment plus grand que le tronc de pyramide. Au contraire, le prisme construit sur la même arête AE, et la petite base EFGH, est plus petit que le tronc de pyramide.

LIVRE VI.

LES FIGURES DANS L'ESPACE :

GRANDEUR ABSOLUE DE LEURS ÉLÉMENTS.

LES PLANS ET LES SURFACES CIRCULAIRES

DANS LEURS POSITIONS RELATIVES.

Positions relatives des surfaces courbes et du plan ; plans tangents, sections planes et figures qu'elles déterminent, pr. 1—27.
Polyèdres et surfaces courbes ; polyèdres réguliers ; pr. 28—31.
Surfaces courbes combinées entre elles, pr. 32—37.

DÉF. 1. — FIG. 244. On entend par *surface cylindrique* ou *cylindre* la surface décrite par une droite indéfinie CD, qui se meut en restant parallèle à une direction donnée, et s'appuyant toujours sur une courbe donnée ABC, qu'on appelle la *directrice* ; la droite mobile CD se nomme la *génératrice* ou l'*arête*.

Il suit de cette définition que par chaque point pris sur une surface cylindrique, on peut mener une droite qui soit tout entière sur cette surface et se confonde avec une arête.

Le cylindre se change en un plan si la directrice est une droite au lieu d'être une courbe.

Si le cylindre, au lieu d'être indéfini, est terminé à deux sections planes non parallèles aux arêtes, ces sections se nomment *bases*.

DÉF. 2. La surface cylindrique est dite *circulaire* si la

directrice est une circonférence de cercle ; si de plus la génératrice est perpendiculaire au plan de ce cercle, le cylindre est appelé *cylindre droit.*

Dans le cas où la génératrice n'est pas perpendiculaire à ce plan, le cylindre est dit *oblique.*

PROPOSITION I.

THÉORÈME. — FIG. 244.

Les sections DEF, D'E'F', *faites dans un cylindre par des plans parallèles sont égales; les sections planes parallèles aux arêtes sont des arêtes.*

1° D'une section à l'autre menez les arêtes DD', EE', FF', etc. Elles sont égales comme parallèles entre plans parallèles. Donc les deux figures DEF, D'E'F' sont égales, (l. 5, p. 50), comme pour le prisme (l. 5, p. 50, r. 1).

2° Soit un plan HF parallèle aux arêtes et coupant la courbe DEF en des points F, E. Si du point F on mène une arête, elle est sur la surface ; mais elle sera aussi dans le plan HF (l. 5, p. 12, r.), qui est parallèle aux arêtes ; donc elle est à l'intersection du cylindre et du plan. De même, par chaque point d'intersection du plan HF et de la courbe DEF, il passe une arête située à la fois dans le plan et sur le cylindre.

Corollaire. Dans le cylindre circulaire les sections parallèles au cercle directeur sont donc des cercles égaux à celui-ci ; leurs centres sont sur une parallèle aux arêtes (fig. 245). Car soient ABC, A'B'C' deux sections circulaires, D le centre de la première ; menez DD' parallèle aux arêtes, soit D' la trace de cette droite sur le plan A'B'C' ; et soient menées les arêtes AA', BB', CC'. Dans la superposition, les points A, B, C, D, coïncident avec A', B', C', D'. Donc D' est le centre de A'B'C'.

Dans le cas du cylindre droit, les arêtes AA', BB', CC' sont toutes à la même distance de DD', et cette distance est

mesurée par le rayon AD, qu'on nomme *rayon* du cylindre droit. Ainsi, la surface de ce cylindre peut être décrite par une droite AA′ tournant autour d'une autre DD′ qui lui est parallèle, sans changer de distance à cette droite ; cette surface est donc aussi le lieu des points également distants d'une droite DD′ nommée *axe* du cylindre.

Remarque. Le plan mené dans le cylindre circulaire oblique par DD′, perpendiculairement au plan du cercle ABC, est un plan de symétrie pour toutes les sections parallèles à ABC, et par conséquent pour le cylindre. Dans le cylindre droit, tout plan mené par l'axe est un plan de symétrie.

DÉF. 3. — FIG. 246. Une *surface conique* ou un *cône* est une surface décrite par une droite AB qui se meut, en passant constamment par un point donné C, et s'appuyant sur une courbe donnée AA′A″, appelée *directrice*. — Le point C se nomme *sommet* ou *centre*. Chaque partie CA, CB de la *génératrice* ou *arête* AB, décrit une portion de cône appelée *nappe* de cône.

Une droite, menée du sommet à un point quelconque de la surface, est tout entière sur cette surface et se confond avec une arête.

Si une nappe de cône se termine à une section plane coupant toutes les arêtes, cette section est appelée *base* du cône.

DÉF. 4. La surface conique est dite *circulaire* si la directrice est une circonférence de cercle. Si de plus la droite qui joint le sommet au centre de cette circonférence est perpendiculaire au plan de cette courbe, on dit que le cône est *droit*.

PROPOSITION II.

THÉORÈME. — FIG. 246.

Les sections faites dans un cône par des plans parallèles sont semblables et semblablement placées par rapport au sommet ;

les sections faites par des plans passant au sommet et coupant la directrice sont des arêtes.

1° Soient EFG, E′F′G′, des sections parallèles; menons des arêtes quelconques CE, CF, etc., et nous pourrons appliquer les raisonnements faits sur la pyramide, l. 5, pr. 57.

2° Soit un plan CI mené par le sommet, et coupant la directrice en des points A, A′... Tirez CA, CA′, droites qui seront sur le plan et sur le cône. Donc, etc.

Corollaire. Par conséquent, dans le cône circulaire, les sections parallèles au cercle directeur sont des cercles; et comme ces sections parallèles sont semblablement placées par rapport au sommet, les centres sont en ligne droite avec ce sommet.

Fig. 247. Dans le cas du cône droit, soient AE, AC, AF plusieurs arêtes, et soient menés les rayons BE, BC, BF de la section circulaire EFC qui a son centre en B; les Δ rectangles ABE, ABC, ABF seront égaux; par conséquent, les angles EAB, CAB, etc., que les arêtes font avec AB, sont égaux. Le cône droit peut donc être engendré par un côté AC d'un angle invariable BAC, qu'on fait tourner autour de l'autre côté AB, supposé immobile. Ce côté AB se nomme l'*axe* du cône. Le prolongement AC′ du côté AC décrit la seconde nappe du cône.

Remarque. Le plan mené par le lieu des centres des sections circulaires du cône oblique, perpendiculairement aux plans de ces sections, est un plan de symétrie.

Déf. 5. Une droite menée par un point d'une courbe plane, est dite *tangente* à cette courbe en ce point, si aucune autre droite menée par ledit point ne peut, aux environs de ce même point, passer entre la courbe et la première droite (l. 2, d. 5, r.).

Déf. 6. Le lieu des tangentes menées par un point d'une surface, à toutes les sections planes conduites par ce point, est appelé *plan tangent*, si toutefois ce lieu est un plan. Le point en question est appelé *point de contact*.

PROPOSITION III.

THÉORÈME. — FIG. 248.

En chaque point d'un cylindre ou d'un cône circulaires, il y a un plan tangent déterminé par l'arête passant en ce point, et par la tangente à la section circulaire. Ce plan est tangent en chaque point de l'arête.

Soit ABC une section circulaire de la surface cylindrique ou conique; BD la tangente à cette courbe en B, BB′ l'arête menée par ce point : par ces droites, concevez un plan DBB′. Soit mené par B un second plan qui ne contienne pas BB′, plan coupant la surface en une courbe BE, et le plan DB′ en une droite FB; je dis que FB touche BE en B. En effet, soit menée dans le plan FBE, par le point B, une droite BG, faisant avec BF un angle infiniment petit. Par BG et BB′ soit conduit un plan HB′. Ce plan coupera le plan ABC en une droite HB, distincte de DB. Or, quelque petit que soit l'angle HBD, la droite HB ne saurait, près du point B, passer entre DB et le cercle ABC (l. 2, d. 5, r.). Donc le plan HB′ et le plan DB′ interceptent une portion de la surface courbe, donc la droite GB ne saurait, aux environs de B, passer entre BF et la courbe BE; ainsi BF est tangente à la courbe BE. Il s'ensuit que toute section plane, faite par B dans la surface courbe a pour tangente en B une droite située dans le plan DB′; ce plan est donc tangent en B.

Je dis qu'il est aussi tangent en tout autre point B′ de l'arête. En effet, par B′ faites une section B′C′ parallèle à ABC; cette section est un cercle dont le centre O′ est avec O, centre de ABC, sur une droite OO′ située dans un plan conduit par BB′ ; il s'ensuit que les rayons OB, O′B′ sont parallèles (l. 5, p. 16). Mais le plan DB′ coupera le plan B′C′ en une droite B′D′ parallèle à BD (l. 5, p. 16). L'angle O′B′D′ est donc = OBD, et droit. On en conclut que B′D′ est tangente au cercle B′C′ en B′ ; et comme le plan tangent en B′ est déterminé par B′D′ et BB′ il se confond avec DB′. Donc, etc.

PROPOSITION IV.

THÉORÈME. — FIG. 249.

Par tout point extérieur au cylindre ou du cône circulaires, il passe deux plans tangents.

Soit A le point : par ce point, menez un plan parallèle au cercle directeur; il coupe la surface courbe suivant un cercle BCD. Du point A menez à ce cercle les deux tangentes AC, AD : soient C, D les points de contact ; DD′, CC′ les arêtes qui y passent. Les plans ADD′, ACC′ seront les deux plans tangents demandés.

Remarque. On a dû reconnaître jusqu'ici l'analogie qui existe entre le cône et le cylindre. Si l'on suppose que le sommet du cône s'éloigne indéfiniment de la directrice, la surface tend à se changer en celle d'un cylindre.

DÉF. 7.— FIG. 250. Une *surface de révolution* est engendrée par une ligne AGC, tournant autour d'une droite donnée AC qui reste immobile. Nous nous bornerons ici au cas où la ligne génératrice AGC est contenue dans un plan qui passe par l'*axe de révolution* AC.

Le cylindre droit, le cône droit, le plan, sont des surfaces de révolution.

Dans le cas du plan la génératrice est une droite perpendiculaire à l'axe.

La génératrice s'appelle aussi *méridienne*. Les sections planes perpendiculaires à l'axe sont appelées *sections droites*.

DÉF. 8. — FIG. 250. La *sphère* est engendrée par un demi-cercle AGC tournant autour du diamètre AC, auquel il se termine. Dans ce mouvement l'arc AGC décrit la surface de la sphère ; or, les points de cet arc restent tous à la même distance du centre B ; par conséquent la surface de la sphère est le lieu de tous les points qui sont à la même distance d'un point B nommé *centre* de la sphère. Toute droite menée du centre à la circonférence est appelée *rayon*. Un *diamètre* est une droite passant par le centre et terminée de part et d'autre à la surface de la sphère.

Deux sphères de même centre et de même rayon coïncident, et si l'on fait tourner l'une d'elles autour du centre supposé fixe, elle ne cessera pas de coïncider avec l'autre.

PROPOSITION V.

Théorème. — Fig. 251.

Dans toute surface de révolution, les sections droites sont des cercles qui ont leurs centres sur l'axe.

Soit AC l'axe, AHC la méridienne; d'un point H de cette courbe menez sur l'axe la perpendiculaire HD; pendant que la figure AHC tourne autour de AD, la droite HD décrira un plan perpendiculaire à AC (l. 5), et le point H décrira dans ce plan un cercle dont le centre est D. Donc la section droite menée par H est une circonférence de cercle dont le centre est en D sur l'axe.

Corollaire. Supposons que AHC soit un demi-cercle, AC son diamètre. La surface de révolution sera une sphère. Or, on peut faire tourner la sphère autour de son centre sans qu'elle cesse d'occuper les mêmes points de l'espace. On peut donc la faire tourner de façon que tout diamètre coïncide avec AC. Par conséquent, 1° la sphère est de révolution autour d'un diamètre quelconque; 2° une section perpendiculaire à un diamètre quelconque, c'est-à-dire une section plane quelconque est un cercle ayant son centre sur le diamètre auquel elle est perpendiculaire; 3° si le plan de la section passe au centre de la sphère, son rayon est celui de la sphère, sinon son rayon HD est moindre que HO, rayon de la sphère.

Déf. 9. Tout cercle de la sphère, dont le plan passe au centre de cette surface, est appelé *grand cercle*. Les autres sont nommés *petits cercles*. Les grands cercles d'une sphère sont tous égaux. De plus, comme leurs plans passent tous par le centre de la sphère, deux grands cercles se coupent suivant un diamètre, et par suite se divisent en parties égales.

PROPOSITION VI.

THÉORÈME. — FIG. 251.

Tout grand cercle divise la sphère en deux parties superposables.

Soit BFK un grand cercle d'une sphère, O le centre. Supposez la partie BFKC détachée de BFKA, et retournant la première de bas en haut, placez-la dans l'autre de façon que le cercle BFK serve de base commune à ces deux parties, placées maintenant du même côté de ce plan, le centre restant aussi commun. Tout point de l'une des surfaces BFKC, BFKA coïncidera avec un point de l'autre, sans quoi il y aurait dans l'une ou l'autre des points inégalement distants du centre.

Remarque. Tout plan diamétral (c'est-à-dire mené par le centre) est un plan de symétrie ; tout diamètre est un axe de symétrie ; le centre est un centre de symétrie.

PROPOSITION VII.

THÉORÈME. — FIG. 251.

Dans une même sphère ou dans des sphères égales, de petits cercles égaux sont également éloignés du centre, et de deux petits cercles inégaux, le plus petit est le plus éloigné du centre.

Soit un petit cercle GIH; du centre O de la sphère soit mené sur ce petit cercle une perpendiculaire OD, et un grand cercle AGH dont le plan passe par D; le pied D de la perpendiculaire OD sera le centre du petit cercle, et l'intersection HG des deux plans sera un diamètre de ce même petit cercle. Ainsi les diamètres des petits cercles sont des cordes du grand cercle, cordes dont les distances au centre (DO) mesurent aussi les distances du centre aux plans des petits cercles. Donc, etc. (l. 2, p. 4).

PROPOSITION VIII.

Théorème.

Par deux points pris sur la surface de la sphère, on peut toujours faire passer un arc de grand cercle.

Si les deux points donnés sont en ligne droite avec le centre, tout plan qui les contiendra passera aussi par le centre et coupera la sphère en un grand cercle passant par les deux points donnés. Si les deux points ne sont pas en ligne droite avec le centre, ils déterminent avec le centre un plan unique, lequel coupera la sphère suivant un grand cercle contenant les deux points ; dans ce cas, on ne peut donc faire passer par les deux points qu'un seul arc de grand cercle.

Déf. 10. — Fig. 252. Un *triangle sphérique* (⊲) est la figure ABC formée sur la sphère par trois arcs de grands cercles AC, AB, BC, terminés à leurs intersections mutuelles. Ces arcs se nomment les côtés du ⊲. Les dièdres que comprennent les plans AOB, BOC, AOC sont appelés les *angles* du ⊲. Ces dièdres sont ceux du trièdre déterminé par les mêmes plans ; les faces de ce trièdre ont pour mesure les côtés du ⊲.

Supposons chacun des arcs AC, AB, BC moindre qu'une demi-circonférence ; si l'on prolonge l'arc AC pour achever le grand cercle ACD, on formera un second ⊲ ABCD, dont un côté ADC est $>$ la demi-circonférence. Les éléments de ce nouveau ⊲ (angles et côtés) se déduisent facilement de ceux du △ ABC, qui est situé tout entier d'un même côté de l'un quelconque des plans AOB, AOC, BOC. Le △ ABC est, pour cette raison, dit convexe ; le △ ABCD n'est pas convexe dans ce cas.

Déf. 11. — Fig. 253. Un polygone sphérique est une figure ABCDE formée sur la sphère par plusieurs arcs de grands cercles, terminés à leurs intersections mutuelles. Ces arcs sont les *côtés* du polygone ; les dièdres de leurs plans sont les *angles* du polygone. Tout polygone sphérique ré-

pond à un angle polyèdre ayant son sommet au centre de la sphère; ses dièdres sont les angles du polygone; ses faces ont pour mesure les côtés du polygone. Celui-ci est dit *convexe*, dans le même cas que le △.

Remarque. Les propriétés démontrées dans le 5e livre, pour les angles polyèdres, etc., s'appliquent immédiatement aux △ et aux polygones sphériques. On pourra donc se contenter de les énoncer ici : il s'agit de figures convexes, et toutes les fois que l'on va comparer deux polyèdres sphériques, il faut sous-entendre qu'ils sont pris sur la même sphère ou sur des sphères égales.

Proposition IX. *Dans tout ▽ convexe, le plus grand côté est moindre que la somme des deux autres.*

Déf. 12. Si au centre de la même sphère on place les sommets de deux trièdres supplémentaires, les ▽ qu'ils interceptent sont appelés *supplémentaires*.

Déf. 13. Un ▽ est dit *isocèle*, s'il a deux côtés égaux.

Proposition X. *Dans un ▽ isocèle, les angles opposés à des côtés égaux sont égaux, et réciproquement.*

Proposition XI. *Dans un même ▽, le plus grand côté est celui qui est opposé au plus grand angle, et réciproquement.*

Proposition XII. *Un ▽ étant donné, il en existe un second qui a les mêmes côtés adjacents aux mêmes angles, mais qui ne peut se superposer avec le premier que si celui-ci est isocèle.*

Déf. 14. Deux ▽ qui offrent ces relations sont dits *symétriques*. Tels sont ABC, A'B'C' (fig. 252). Ils sont déterminés par deux trièdres symétriques ayant le centre O pour sommet.

Proposition XIII. *Deux ▽ sont égaux ou symétriques, s'ils ont un côté égal adjacent à deux angles égaux.*

Proposition XIV. *Deux ◁ sont égaux ou symétriques s'ils ont un angle égal compris entre côtés égaux.*

Proposition XV. *Deux ◁ sont égaux ou symétriques, s'ils*

ont deux côtés égaux chacun à chacun et un angle opposé à l'un d'eux, aussi égal, pourvu que l'angle opposé à l'autre côté égal, soit de même espèce de part et d'autre, sauf un cas d'exception.

PROPOSITION XVI. *Deux* ◁ *sont égaux ou symétriques s'ils ont deux angles égaux chacun à chacun, et un côté opposé à l'un d'eux aussi égal, pourvu que le côté opposé à l'autre soit aussi de même espèce de part et d'autre,* sauf un cas d'exception.

PROPOSITION XVII. *Deux* ◁ *sont égaux ou symétriques, s'ils ont les côtés respectivement égaux.*

PROPOSITION XVIII. *Deux* ◁ *sont égaux ou symétriques, s'ils ont les angles respectivement égaux.*

PROPOSITION XIX. *Dans tout polygone sphérique convexe, la somme des côtés est moindre qu'une circonférence de grand cercle.*

PROPOSITION XX. *Dans tout polygone sphérique convexe, la somme des angles est moindre que deux droits multipliés par le nombre des côtés, et plus grande que ce même produit diminué de quatre droits.*

PROPOSITION XXI. *Avec des côtés donnés, se succédant dans un ordre donné, et comprenant des angles donnés, on ne peut former plus de deux polygones sphériques, etc.* (l. 5, p. 45).

DÉF. 15. Deux polygones sphériques sont dits *symétriques*, si les angles polyèdres correspondants le sont.

Remarque. Ce qui a été dit sur le trièdre à la suite de la pr. 44, liv. 5, s'applique au ◁. Il y a aussi le ◁ *birectangle, trirectangle.*

PROPOSITION XXII. *Deux polygones sphériques symétriques peuvent se décomposer en parties superposables.*

Pour démontrer cette proposition, il suffit, dans la prop. 42, liv. 5 (fig. 231), de prolonger certains plans jusqu'à la sphère qui aurait pour centre A, et pour rayon AB.

Déf. 16. On entend par *pyramide sphérique* le corps compris entre un polygone sphérique et l'angle polyèdre correspondant. Deux angles polyèdres symétriques interceptent des pyramides dites *symétriques*. Deux polygones sphériques symétriques ou deux pyramides sphériques symétriques ont évidemment pour centre de symétrie le centre de la sphère, et peuvent par suite être aussi placés symétriquement par rapport à un plan.

Proposition xxiii. *Deux pyramides sphériques symétriques peuvent se décomposer en parties superposables* (voyez pr. 22).

PROPOSITION XXIV.

Théorème. — Fig. 254.

De toutes les lignes menées sur la surface de la sphère, la plus courte, entre deux points donnés, est l'arc de grand cercle qui joint ces points, pourvu qu'il ne surpasse pas la demi-circonférence.

1° Si deux arcs de grand cercle ACB, AED, tracés sur une même sphère, sont égaux, rien n'empêche de les superposer ; par conséquent, la plus courte ligne entre A et B doit être la même qu'entre A et D, sur la sphère.

2° De deux arcs de grand cercle ACBF, ACB, pris sur une même sphère, et dont aucun ne surpasse la demi-circonférence ACA′, ACBF, qui est le plus grand, aura entre ses extrémités et sur la sphère une distance plus grande que l'autre. En effet, tirez le diamètre AA′, et du point B menez sur ce diamètre un plan perpendiculaire BDB′ ; il coupe la sphère en un cercle, et puisque l'arc ACBF ne surpasse pas la demi-circonférence, le point F tombe au delà du plan BDB′, par rapport au point A, de sorte que si l'on trace la plus courte ligne de A en F sur la sphère, cette ligne, quelle qu'elle soit, coupera la circonférence BDB′ en un point G. Soit AIGF cette plus courte distance : tirez l'arc de grand cercle AKG ; cet arc est égal à AB ; car si L est le centre du cercle BDB′,

à cause des rayons BL, GL, les obliques qui joindraient A et B, A et G seraient égales, et les arcs AB, AKG, dont elles seraient les cordes, sont égaux. Donc la distance de A en B, sur la sphère, est égale à AIG ; mais AIGF>AIG ; donc etc.

Cela posé, soient (fig. 254 bis) sur une sphère deux points A, B, et l'arc de grand cercle ACB, qui ne surpasse pas la demi-circonférence. Soit, s'il est possible, ADEFB la ligne la plus courte de A en B, sur la sphère. Prenez sur cette ligne un point quelconque E, tirez les arcs de grand cercle AGE, EHB. Si AGE est égal à ACB, la distance de A en B est égale à ADE ; donc elle n'est pas ADEB. Si AGE est > ACB, la distance de A en B est moindre que ADE ; donc elle n'est pas non plus ADEB. Supposons donc l'arc AGE < ACB. On aura AGE+EHB>ACB (p. 9) ; prenons l'arc AC = AGE ; il s'ensuit que CB<EHB ; et la distance de C en B sera<EHB (2°). Mais de A en C elle est égale à ADE. Donc il existe une ligne menée de A à B et par C, laquelle est moindre que ADEFB ; donc celle-ci n'est pas la plus courte de A en B. Même conclusion pour toute ligne autre que l'arc ACB. Donc, etc.

Déf. 17. Un *pôle* d'un cercle de la sphère est un point situé sur la surface de la sphère, et également distant de tous les points de la circonférence de ce cercle.

PROPOSITION XXV.

Théorème. — Fig. 255.

Tout cercle de la sphère a deux pôles situés aux extrémités du diamètre perpendiculairement au plan de ce cercle.

Soit un grand cercle ABC, et un petit cercle *abc* parallèle au premier ; O, *o* leurs centres ; D, D′ les extrémités du diamètre perpendiculaire aux plans des deux ; le demi-cercle DAD′, tournant autour de DD′, décrit la sphère ; le rayon AO décrit le plan ABOC ; le point A décrit la circonférence ABC, le point *a* la circonférence *abc*. Dans ce mouvement les distances du point A aux points D, D′, sont toujours mesurées par les quarts de circonférence, ou *quadrants* AD, AD′ ; celles

du point *a*, aux mêmes points D, D′, le sont par les arcs *a*D, *a*D′. Donc les points D, D′ sont les pôles des cercles ABC, *abc*.

Remarque. Le *compas*, qui sert à décrire les cercles sur un plan, peut servir à les décrire sur la sphère. Par exemple, pour décrire le cercle *abc*, on placera la *pointe fixe* du compas au pôle D, la pointe mobile en *a*, et faisant tourner l'instrument autour de celle-là, on décrira le cercle *abc*. Si l'intervalle des pointes est un quadrant AD, le cercle décrit sera un grand cercle.

Pour faire passer un grand cercle par deux points donnés A, B, on en cherche le pôle. A cet effet, des points A, B, comme pôles, avec un quadrant pour intervalle, on décrit deux arcs qui se coupent en un point D : ce point sera le pôle cherché. Car si on joint le centre O de la sphère aux trois points A, B, D, qu'on imagine les arcs de grand cercle AD, BD qui seront des quadrants, les angles AOD, BOD qui interceptent ces quadrants, seront droits. Donc le rayon OD perpendiculaire à AO et OB, l'est au plan AOB, et le point D est un pôle du grand cercle situé dans ce plan. Il ne reste donc plus qu'à décrire de D comme pôle, avec l'intervalle AD, l'arc AB.

Pour mener d'un point I de la surface sphérique un arc de grand cercle perpendiculaire à un autre ABC, de ce point I comme pôle, avec un intervalle d'un quadrant, on décrit un arc qui coupera l'arc ABC en un point E ; de ce point E, avec le même intervalle, on décrira un arc de grand cercle. Il passera par I et sera de plus perpendiculaire à ABC. Car les arcs de grand cercle IE, BE sont des quadrants ; si donc on tire BO, IO, OE, les angles BOE, IOE sont droits ; la droite EO est perpendiculaire au plan IOB, et le plan BOE, qui passe par OE, est aussi perpendiculaire au plan IOB ; c'est-à-dire que les arcs IB, ABC sont perpendiculaires entre eux.

PROPOSITION XXVI.

Théorème. — Fig. 256.

En chaque point d'une sphère, il existe un plan tangent, et ce plan est perpendiculaire au rayon mené à ce point.

Soit A un point d'une sphère, B son centre ; AEF une section plane quelconque menée par A ; H son centre. La droite BH sera perpendiculaire au plan AEF (p. 5, c.). Tirez le rayon AH, et menez en A la tangente AG au cercle EAF : elle est perpendiculaire à ce rayon AH, et comme elle est dans le plan EAF, elle est en même temps perpendiculaire à la droite qui joint le point A à un point quelconque de BH, perpendiculaire au même plan EAF (l. 5). Donc AG est perpendiculaire au rayon AB de la sphère. Il s'ensuit que les tangentes aux sections planes en A, sont perpendiculaires au rayon AB et ont pour lieu un plan perpendiculaire à ce rayon AB (l. 5, p. 5). Donc, etc. (d. 6).

Remarque 1. Tout autre plan mené par A sera oblique au rayon AB ; la perpendiculaire menée du centre sur ce nouveau plan sera donc $<$ AB, et ce plan aura des points dans la sphère, qu'il coupera.

Remarque 2. La droite AB étant perpendiculaire au plan CD, toute autre droite menée de B sur le plan CD sera $>$ AB ; donc sa trace sur CD, c'est-à-dire tout point du plan CD, autre que A, sera hors de la sphère, et le plan tangent n'a de commun avec la sphère que le point de contact.

PROPOSITION XXVII.

THÉORÈME. — FIG. 257.

Par un point* A *extérieur à une sphère, on peut mener une infinité de plans tangents à cette surface ; par une droite extérieure* AB, *on peut en mener deux.

1° Soit O le centre de la sphère ; par les points A, O, menez un plan quelconque ; il coupera la sphère en un grand cercle ECD ; du point A menez-lui une tangente AC ; soit C le point de contact ; le plan tangent en C contiendra la tangente AC, et, par suite, le point A. Or, par les points A, O, on peut mener une infinité de plans. Donc, etc.

2° Soit AB la droite ; du centre O menez-lui un plan perpendiculaire, qui la coupera en un point A ; soit DCE



le grand cercle intersection de ce plan et de la sphère, AC, AD les deux tangentes menées de A à ce cercle ; les plans CAB, DAB seront les plans tangents en question, et les points de contact C, D, des tangentes, seront aussi ceux des plans tangents. En effet, le plan CDE, perpendiculaire à la droite AB, l'est au plan CAB qui la contient (l. 5, p. 25, r.) ; mais CO est dans le premier de ces plans, à angle droit sur l'intersection ; donc CO est perpendiculaire au plan CAB (l. 5, 26), et ce plan est tangent en C. De même le plan DAB est tangent en D.

Aucun autre plan mené par AB ne peut être tangent : car soit conduit par AB un plan BAF, et soit mené de O, à ce plan, une perpendiculaire OF qui le rencontre en F; tirez AF. AB est perpendiculaire à AO, comme l'étant au plan CAD ; donc AF est aussi perpendiculaire à AB, parce que les droites AF, AO, qui joignent un point A d'un plan BAF, à tous les points d'une droite OF perpendiculaire à ce plan, sont perpendiculaires à une même droite AB menée dans ce plan. Les droites AF, AO, AC, perpendiculaires à AB en A, sont ainsi dans un plan ACO. Or si le plan BAF était tangent, OF serait égal au rayon, le point F serait le point de contact, et du point A on pourrait mener plus de deux tangentes au cercle DCE; donc, etc.

Remarque. Si une sphère touche deux plans non parallèles BAC, BAD, son centre se trouve sur le plan ***bissecteur*** du dièdre des plans donnés (c'est-à-dire sur le plan qui divise ce dièdre en deux parties égales) ; car le plan DAC étant perpendiculaire à AB, les angles DAO, CAO sont les sections droites des dièdres OABD, OABC; mais les Δ AOD, AOC, rectangles D, C, ont l'hypothénuse AO commune, OD = OC, et sont égaux. Donc angle DAO = CAO, et dièdre OABD = OABC.

On peut remarquer que le plan bissecteur OAB est le lieu de tous les points qui, dans l'intérieur du dièdre, sont également distants des faces; car si l'on suppose que les droites AD, AO, AC se meuvent parallèlement à elles-mêmes, de façon que le point A décrive AB, ces droites décri-

ront les faces et le plan bissecteur du dièdre, et AO sera, dans chaque position, le lieu des points qui, dans l'angle DAC, sont également distants des côtés AD, AC.

Déf. 18. Un prisme ABCDA'B'C'D' (fig. 258) est dit *inscrit* dans un cylindre à bases parallèles, si les bases du prisme sont inscrites à celles du cylindre; le cylindre est dit *circonscrit* au prisme. Les arêtes latérales du prisme sont des arêtes du cylindre.

Déf. 19. Un prisme est dit *circonscrit* à un cylindre à bases parallèles si les bases du prisme sont circonscrites à celles du cylindre, celui-ci est dit *inscrit* au prisme; les faces du prisme sont tangentes au cylindre. A tout prisme droit à base régulière on peut inscrire et circonscrire un cylindre droit, et réciproquement.

Déf. 20. — Fig. 259. Une pyramide ABCDE est dite *inscrite* à un cône à une base, si les deux corps ont même sommet, et si la base de la pyramide est inscrite à celle du cône; les arêtes latérales de la pyramide sont des arêtes du cône. — Le cône est *circonscrit* à la pyramide.

Déf. 21. Une pyramide est dite circonscrite au cône si ces deux corps ont même sommet, et si la base de la pyramide est *circonscrite* à celle du cône. Les faces latérales de la pyramide sont tangentes au cône. A toute pyramide régulière on peut inscrire et circonscrire un cône droit, et réciproquement.

Déf. 22. Un polyèdre est *inscrit* à la sphère, s'il a tous ses sommets sur la surface de la sphère, qui est dite *circonscrite* au polyèdre.

Déf. 23. Un polyèdre est *circonscrit* à la sphère, si toutes ses faces sont tangentes à la sphère, qui est dite *inscrite* au polyèdre.

PROPOSITION XXVIII.

Théorème. — Fig. 260.

A tout tétraèdre ABCD *on peut circonscrire une sphère unique.*

Soit E le centre du cercle circonscrit à une face BCD du tétraèdre ; en ce point élevez au plan BCD une perpendiculaire EG, et au point F, milieu d'une arête AB, extérieure à BCD, menez un plan FG perpendiculaire à cette arête AB : je dis que ce plan coupera la droite EG ; car, sans cela, ces deux lieux seraient parallèles et le plan BCD, perpendiculaire à EG, serait aussi perpendiculaire à FG, et par suite parallèle à AB (l. 5), ce qui n'est pas. Soit G l'intersection du plan FG et de la droite EG. Ce point G, appartenant au plan FG, perpendiculaire au milieu de AB, est également distant de A et B (l. 5); mais le même point G, appartenant à EG, est aussi également distant de B, C, D. Car les distances BE, CE, DE, rayons d'un même cercle, étant égales, les obliques GB, GC, GD seront aussi égales (l. 5). Donc la sphère décrite du centre G avec le rayon BG passe par les quatre sommets du tétraèdre.

Remarque. Le point G appartient à chacun des plans respectivement perpendiculaires aux milieux des six arêtes du tétraèdre. Donc ces six plans se coupent en un point.

PROPOSITION XXIX.

Théorème. — Fig. 261.

A tout tétraèdre on peut inscrire une sphère unique.

Soient ABO, CAO les plans bissecteurs des dièdres DABC, DACB; ces plans se coupent suivant une droite AO passant en A ; soit encore mené le plan BCO, bissecteur du dièdre ABCD, il coupera la droite AO en un point O; car il coupe le plan BAO en une droite BO, et le plan BAO prolongé coupe le tétraèdre en un Δ BAE, dans lequel les droites AO, BO se coupent. Le point O, comme appartenant au plan ABO, sera également distant des faces ABD, ABC; de même, comme étant sur le plan CAO, il sera également distant des faces ABC, ADC ; et enfin étant sur le plan BOC, il est également distant de ABC, BCD. Donc si de ce point O on mène sur les quatre faces du tétraèdre des perpendiculaires, elles

seront égales, et le point O est le centre d'une sphère tangente aux quatre faces.

Cette sphère est unique, car toute sphère tangente à deux plans a son centre sur le plan bissecteur.

Remarque 1. Le point O est aussi sur les plans bissecteurs des trois autres dièdres du tétraèdre.

Remarque 2. Si l'on prolonge indéfiniment les faces du tétraèdre, on pourra décrire quatre nouvelles sphères, dont chacune touche ces quatre plans, extérieurement au tétraèdre. (Comparez, l. 2.)

DÉF. 24. On appelle *polyèdre régulier* tout polyèdre dont toutes les faces sont des polygones réguliers, égaux et également inclinés, et dont, par conséquent, tous les angles polyèdres sont égaux.

PROPOSITION XXX.

THÉORÈME.

Il y a cinq polyèdres réguliers convexes, et il n'y en a pas plus de cinq.

Je dis d'abord qu'il n'y en a pas plus de cinq.

En effet, pour former un polyèdre régulier convexe avec des polygones réguliers égaux, il faut qu'on puisse assembler autour d'un point un certain nombre de ces polygones, de façon que la somme des angles ainsi assemblés soit moindre que quatre droits (l. 5, p. 43). Or, comme il faut au moins trois faces pour un angle polyèdre, on doit exclure tous les polygones qui ont plus de cinq côtés. Car, dans l'hexagone, chaque angle vaut 120°, et si l'on assemble trois de ces angles autour d'un point, on aura 360°, ce qui formera un plan et non pas un angle polyèdre. A plus forte raison, ne saurait-on prendre des polygones de plus de six côtés, puisque l'angle du polygone régulier augmente avec le nombre des côtés. On ne pourra donc employer que des golygones de trois, quatre, ou cinq côtés. En fait de pentapones réguliers, on ne saurait en prendre plus de trois au-

tour d'un point. Car l'angle du pentagone régulier vaut 108°, et quatre de ces angles feront plus que 360°. On ne saurait non plus assembler plus de trois carrés autour d'un point. Quant aux triangles équilatéraux, on peut en réunir trois, quatre ou cinq; mais si l'on en prenait six, comme l'angle du triangle équilatéral vaut 60°, on aurait déjà 360°. *A fortiori*, n'en peut-on pas prendre plus de six. Donc il n'y a pas plus de cinq polyèdres réguliers, dont trois ont pour faces des triangles, un quatrième a pour faces des carrés, et le cinquième des pentagones.

Je dis, en second lieu, qu'il y a cinq polyèdres réguliers.

1° Le *tétraèdre régulier*.

Fig. 262. Construisez un angle trièdre avec trois angles de 60° chacun, soit ABCD cet angle trièdre. Prenez les trois arêtes AB, AC, AD égales entre elles, et joignez BD, BC, CD; le tétraèdre régulier sera formé. Car le triangle ABC est isocèle, puisque AB=AC, et comme l'angle en A est de 60°, il est équilatéral; il en est de même des triangles ACD, ABD; par conséquent, BCD est aussi un triangle équilatéral. Ainsi, le tétraèdre est compris sous quatre triangles équilatéraux égaux; d'ailleurs, les angles dièdres sont égaux. En effet, les deux angles trièdres D et A sont égaux comme composés de faces égales chacune à chacune. Donc le dièdre AC est égal à CD ou à BD, etc.

2° L'*hexaèdre régulier* ou *cube*.

Aux quatre sommets d'un carré, élevez au plan de ce carré et du même côté de ce plan, des perpendiculaires égales au côté du carré; leurs extrémités supérieures détermineront un carré égal au premier, et le cube sera construit.

3° L'*octaèdre régulier*.

Fig. 263. Soit BEDC un carré, O son centre; en ce point O élevez au plan BEDC une perpendiculaire AF, et prenez-y les deux distances OA, OF égales entre elles et à la demi-diagonale BO; joignez les points A et F aux quatre sommets du carré; la figure ABCDEF sera un octaèdre régulier. En effet, les obliques qui partent des points A et F sont égales; d'ailleurs, les triangles rectangles AOE, OED

étant égaux à cause de AO = OD et de OE commun, le côté AE sera égal à ED. Par conséquent, les huit faces du polyèdre sont des triangles équilatéraux égaux. Les angles dièdres sont aussi égaux. Pour le prouver, prenons les angles trièdres ABED, DEAC qui ont les trois faces égales chacune à chacune; savoir l'angle droit BAD égal à l'angle droit CDE, et les angles BAE, EAD, ADE, ADC égaux comme angles de 60°. Donc aussi le dièdre DAEB est égal au dièdre EADC. Le même raisonnement s'applique à deux dièdres quelconques. Donc enfin la figure est un octaèdre régulier.

4° Le *dodécaèdre régulier*.

Fig. 264. Avec trois angles AEH, HED, AED égaux entre eux et à l'angle du pentagone régulier, on formera un angle trièdre E; ses trois dièdres seront égaux. Sur chacun de ces angles AEH, AED, DEH on achèvera un pentagone régulier, en donnant à ces trois polygones des côtés égaux. Soient EABCD, AEHGF, HEDKI ces trois pentagones. Les deux droites AF, AB formeront un angle FAB égal à AEH. Car le trièdre déterminé par les trois arêtes AF, AE, AB et le trièdre E ont deux faces égales également inclinées et sont égaux : donc FAB = AEH. On pourra donc aussi sur FA et AB achever un pentagone FAO égal à ABD. On pourra de même placer le pentagone OBM égal aux précédents. Si l'on fait de même sur MCD et sur KDC, les deux plans, ainsi obtenus, se confondront comme faisant avec le plan CDA un angle dièdre égal à HEAD. Cela posé, aux points H, F, O, M, K se rencontrent les mêmes circonstances qu'en A, B, C, D. Donc on pourra assembler en ces points cinq nouveaux pentagones égaux entre eux et aux six précédents; ces figures ne laisseront plus que l'espace vide *abcde*, circonscrit par cinq côtés égaux. Or, en chacun des points *a*, *b*, *c*, *d*, *e* il se passe encore ce que nous avons rencontré en A, B, etc. Donc le plan *abc* contiendra aussi les trois droites *cd*, *de*, *ea*, et fera avec chacun de plans adjacents des angles dièdres égaux entre eux et aux autres dièdres de la figure. On aura donc ainsi construit un dodécaèdre régulier.

5° L'*icosaèdre régulier*.

Fig. 265. Soit *abcde* un pentagone régulier, *o* son centre, *of* une perpendiculaire au plan de ce polygone. Dans le plan *aof* décrivez du point *a* comme centre, avec un rayon égal à *ab*, un arc qui coupera cette perpendiculaire *of* en un point *f*; les droites *fe*, *fd*, *fc*, *fb*, *fa* seront égales entre elles et au côté *ab*; on aura donc, autour du point *f*, cinq triangles équilatéraux égaux. Les plans de ces triangles comprennent des dièdres égaux. Car les trièdres *abfe*, *bafc* sont égaux comme formés chacun par un angle de pentagone régulier et deux angles de 60°. Donc le dièdre *fb* est égal au dièdre *fa*. On prouvera de même que les autres dièdres sont égaux à *fa*.

Actuellement, soit ABCDEF un angle polyèdre égal à celui qu'on vient de former ; supposons qu'on en ait formé encore plusieurs, tous égaux à celui-là. Prenons-en un second, et superposons deux de ses faces avec les triangles ADE, ADC, les trois autres viendront se placer en DEK, DIK, DIC, ce qui formera trois faces nouvelles. Un troisième angle pentaèdre sera superposé par trois faces avec les triangles CBA, CAD, CDI ; il donnera les deux nouvelles faces CBH, CHI. Un quatrième sera superposé par trois faces avec les triangles BHC, BAC, BAF, et donnera les deux nouvelles faces BHG, BFG. Un cinquième sera superposé sur les trois triangles FBG, FBA, AFE ; il donnera encore deux faces FGL, FLE. Autour du point E se trouvent assemblés quatre triangles EDK, EDA, EAF, EFL, comprenant des angles dièdres tous égaux à ceux de l'angle *f*. Si donc on place sur ces quatre faces un nouvel angle égal à *f*, on obtiendra encore une face LEK, ce qui forme en tout quinze faces égales et également inclinées. Sur les trois faces IKD, DKE, LKE on superposera un nouvel angle pentaèdre, et l'on aura les deux nouvelles faces LKM, MKI. Au point I sur les quatre faces HIC, CID, DIK, IKM on en superposera encore un, qui donnera la nouvelle face HIM. Au point H on fera de même, et l'on aura la nouvelle face HGM, ainsi qu'au

point G, ce qui fournira encore une face GML. On aura donc en M cinq faces, ce qui donne les vingt faces.

PROPOSITION XXXI.

Théorème. — Fig. 266.

A tout polyèdre régulier on peut inscrire et circonscrire une sphère.

Soit, dans un polyèdre régulier, AB l'arête commune à deux faces adjacentes, E son milieu, C, D les centres de ces faces; les droites CE, DE seront perpendiculaires à AB, ainsi que leur plan CED. Dans ce plan, menez les droites CO, DO, respectivement perpendiculaires à CE, DE; elles se couperont en un point O, et si l'on tire EO, les Δ CEO, DEO auront le côté CE=DE, le côté EO commun, et l'angle droit C=D. Donc CO=DO.

Cela posé, soit FG un second côté de la face qui a D pour centre, H le centre d'une face dont FG est aussi un côté, I le milieu de FG; tirez OH, DI, HI; les droites DI, IH, ainsi que leur plan DIH, seront perpendiculaires à FG, et, par suite, le plan DIH est perpendiculaire à FG et au plan ABFG. Ce plan DIH contient donc DO, qui est aussi perpendiculaire au plan ABFG. Actuellement, faites tourner ce plan DIHO autour de DO jusqu'à ce qu'il coïncide avec CEDO. L'angle droit ODI coïncidera avec ODE, DI avec son égal DE, et l'angle DIH, section droite du dièdre FG, avec DEC, section droite du dièdre AB, égal à FG, enfin, IH avec EC, vu que toutes les faces sont des polygones réguliers égaux. Donc OH coïncide avec OC, le plan FGH avec ACB, et la droite OH sera égale à OC, et perpendiculaire au plan FHG. Donc les perpendiculaires CO, DO, HO, élevées aux centres des faces, se coupent en un point O, et sont égales. Par conséquent, si de O comme centre, avec le rayon OC, on décrit une sphère, elle touchera les faces à leurs centres C, D, H. En second lieu, les distances AO, BO sont égales, vu que EA= EB, et que AB, perpendiculaire au plan CED, l'est à OE. La

superposition faite plus haut prouve que les distances FO, GO, sont aussi égales à AO. Donc la sphère décrite du même centre O et du rayon AO, sera circonscrite au polyèdre.

PROPOSITION XXXII.

Théorème.

Deux cylindres, si les arêtes de l'un sont parallèles à celles de l'autre, de même que deux cônes qui ont même sommet, ne se coupent que suivant des arêtes.

Si, par un point commun aux deux surfaces, on mène une arête de l'une, elle est aussi arête de l'autre ; car, dans le premier cas, elle est parallèle aux arêtes des deux surfaces ; dans le second, elle passe au sommet commun. Donc, etc.

Remarque. Si les cylindres ou les cônes sont circulaires, le nombre des arêtes communes est au plus de deux ; car si, par un point commun aux surfaces, on mène dans chacune une section circulaire, à chaque arête commune répondra un point d'intersection de ces cercles. Donc il n'y a pas plus de deux arêtes communes.

Enfin, si les deux surfaces sont droites, le plan des axes est un plan de symétrie ; par suite, s'il y a deux arêtes communes, elles sont symétriques par rapport à ce plan. Il s'ensuit qu'aucune d'elles ne sera située dans ce même plan.

Déf. 25. Deux surfaces sont dites *tangentes* en un point commun, si elles ont, en ce point, même plan tangent.

PROPOSITION XXXIII.

Théorème.

Si deux cylindres droits, ou deux cônes droits de même sommet, ont une seule arête commune, ils se touchent sur toute cette arête.

Car si par un point de l'arête commune (qui est dans le

plan des axes) on mène deux sections droites, elles auront en ce point même tangente.

PROPOSITION XXXIV.

Théorème.

Pour que deux cylindres droits à axes parallèles 1° se coupent, 2° se touchent, 3° n'aient aucun point commun, il faut et il suffit, respectivement, que la distance des axes soit : 1° plus petite que la somme des rayons et plus grande que leur différence, 2° égale à cette somme ou à cette différence, 3° plus grande que la somme ou plus petite que la différence des rayons.

Coupez les cylindres par un plan perpendiculaire aux axes, et la question est ramenée aux cercles.

Déf. 26. L'angle d'un cône droit est celui que l'arête fait avec l'axe.

PROPOSITION XXXV.

Théorème.

Pour que deux nappes de cônes droits de même sommet 1° se coupent, 2° se touchent, 3° n'aient que le sommet commun, il faut et il suffit, respectivement, que l'angle des axes soit : 1° plus petit que la somme et plus grand que la différence des angles des cônes; 2° égal à la somme ou à la différence; 3° plus grand que la somme ou plus petit que la différence.

1° S'il y a deux arêtes communes, elles sont hors du plan des axes, et chacune détermine avec les axes un trièdre convexe, où une face quelconque est moindre que la somme des autres. Donc, etc.;

2° S'il y a une arête commune, elle est dans le plan des axes, etc.;

3° S'il n'y a pas d'arête commune, le plan des axes coupe les cônes suivant deux angles, dont l'un est hors de l'autre, ou dans l'autre; donc, etc.

Les réciproques se déduisent de là.

PROPOSITION XXXVI.

THÉORÈME. — FIG. 267.

Deux surfaces de révolution de même axe, qui se coupent, ont pour intersection une ou plusieurs sections droites.

Soit AB l'axe commun, ACDB, ECDF les génératrices ou méridiennes supposées prises dans un même plan. Si la figure tourne autour de AB, les points C, D, supposés communs aux génératrices, décriront des sections droites communes. Si les méridiennes n'avaient pas de point commun, les surfaces n'en auraient pas non plus.

Corollaire. 1° Deux cônes droits de même axe et de sommets différents se coupent en deux sections droites, situées sur deux nappes différentes de l'un des cônes.

2° Un cylindre droit et un cône droit de même axe se coupent en deux sections droites.

3° Une sphère et un cylindre droit, ou une sphère et un cône droit, si dans chaque cas l'axe passe au centre de la sphère, ont de commun deux cercles, ou un cercle, ou rien, selon qu'une arête quelconque du cylindre ou du cône est sécante, tangente, ou extérieure au grand cercle dont le plan contient cette arête.

4° Deux sphères se coupent en une circonférence perpendiculaire à la ligne des centres (axe commun), se touchent en un point situé sur cette ligne, ou n'ont aucun point commun, dans les mêmes cas respectifs où les grands cercles situés dans un plan mené par les deux centres, se coupent, se touchent ou n'ont aucun point commun.

PROPOSITION XXXVII.

Théorème.

La sphère comparée au cylindre droit, ou au cône droit, est tangente en un point, ou bien sur toute une section droite, si un grand cercle de la sphère touche une arête ou deux arêtes opposées situées, dans tous les cas, dans un plan qui passe par l'axe.

1° Fig. 268. Soit A le centre d'une sphère, BC l'axe d'un cylindre droit, DG une arête tangente en D au grand cercle DEF situé dans le plan ABC. Tirez AD, qui sera perpendiculaire à BC. Le plan mené par D, perpendiculairement à l'axe BC, déterminera un cercle DIK sur la sphère, et une section droite DL sur le cylindre ; ces deux cercles ayant de commun le point D de la ligne de leurs centres AH, se touchent en D ; ainsi ils ont en ce point D une tangente commune DM ; il s'ensuit que le plan GDM sera tangent en D à la sphère et au cylindre, de sorte que ces deux surfaces se touchent en D.

Pour le cône, le raisonnement se modifie un peu.

Du reste, la sphère peut être intérieure au cône ou au cylindre.

2° Si (fig. 269 et 270) le grand cercle EIG de la sphère touche deux arêtes opposées CD, C'D', on peut engendrer toute la figure en faisant tourner autour de l'axe AB le demi-grand cercle HEI avec sa tangente CD; le point de contact E décrira une section droite commune aux deux surfaces. En chaque point de cette section droite, en G, par exemple, l'arête C'D', et la tangente GK à cette section, déterminent un plan tangent commun aux deux surfaces, qui sont ainsi tangentes sur toute la circonférence EFG.

Dans ce cas, le cylindre et le cône sont dits *circonscrits* à la sphère, qui leur est *inscrite*.

LIVRE VII.

LES FIGURES DANS L'ESPACE.

GRANDEUR RELATIVE DE LEURS ÉLÉMENTS.

Angles dièdres et angles polyèdres, pr. 1—2.
Similitude des polyèdres, pr. 3—5.
Similitude des surfaces courbes, pr. 6—9.
Axes, plans de similitude; pôles, plans polaires, pr. 10—16.

PROPOSITION I.

Théorème. — Fig. 271.

Deux angles dièdres CABD, C'A'B'D', *sont entre eux comme leurs sections droites* CAD, C'A'D'.

Supposons que les sections droites soient commensurables entre elles, et qu'on ait DAC : D'A'C' :: 5 : 3, c'est-à-dire qu'une commune mesure soit contenue 5 fois dans DAC, 3 fois dans D'A'C'. L'angle DAC pourra donc se diviser en 5 parties égales, DAE, EAF....; l'angle D'A'C' en contiendra 3, D'A'E', etc. Par les droites AE, AF, etc., et l'arête AB, menez des plans; le dièdre DABC se trouvera décomposé en 5 dièdres qui seront égaux, comme ayant des sections droites égales. De même D'A'B'C' se décomposera en 3 parties égales à celles de DABC. Donc DABC : D'A'B'C' :: 5 : 3, ou :: DAC : D'A'C'. Si les sections droites ne sont

pas commensurables entre elles, la proportion aura toujours lieu (I. 3).

Corollaire. On peut donc dire que le *dièdre a même mesure que sa section droite*, en sousentendant que l'unité d'angle est la section droite de l'unité de dièdre; par suite, le dièdre a aussi pour mesure celle de l'arc qui sert de mesure à la section droite.

PROPOSITION II.

THÉORÈME.

L'angle polyèdre a même mesure que la demi-somme des sections droites de ses dièdres, moins un angle droit multiplié par le nombre des faces, nombre préalablement diminué de deux unités.

Nous ferons observer : 1° que (fig. 272) tout dièdre ABCD peut se partager en deux trièdres FEGC, FEGB, et même d'une infinité de manières; 2° que (fig. 273) la somme des quatres trièdres OBCA, OACE, OCEF, OBCF déterminés d'un même côté d'un plan BFE, par deux plans concourants BCE, ACF, est égale à 4 trièdres trirectangles. Car si les traces EB, AF de ces deux plans sur le troisième étaient perpendiculaires entre elles, et que OC, intersection de ces mêmes plans, fût perpendiculaire au plan BFE, nos quatre trièdres OABC, etc., seraient trirectangles, et leur somme serait restée la même.

Cela posé, considérons 1° (fig. 273) un trièdre convexe OABC; les faces étant prolongées indéfiniment dans tous les sens, nommons A, B, C, les dièdres de OABC. Les deux trièdres OABC, OACE valent en somme le dièdre B; de même OABC+OBCF=A; ensuite OABC avec OABC′, qui est symétrique de OEFC auquel par conséquent il équivaut, font ensemble C; donc

OABC+OACE+OABC+OBCF+OABC+OEFC=A+B+C.

Le premier membre de cette égalité contient les quatre trièdres formés autour de AC, plus 2 OABC; ces 4 trièdres

valent 4 trièdres trirectangles, ou 2 *dièdres droits*; donc $2\,OABC = A + B + C - 2$ dièdres droits, et $OABC = \frac{A+B+C}{2} - 1$ dièdre droit. Ainsi, prenant pour unité de trièdre un trièdre quelconque, et pour unité de dièdre la demi-somme de ses dièdres moins un droit, on peut dire que tout trièdre a même mesure que, etc. Enfin, prenant pour unité d'angle la section droite de ce dièdre-unité, on aura pour mesure du trièdre la demi-somme des sections droites de ses dièdres moins un angle droit.

2° Soit (fig. 217) un trièdre non convexe ACDB′B. Il est égal à 2 dièdres droits moins le trièdre convexe ABCD, dont je représente les dièdres par B, C, D; ainsi le premier vaut $2 - \left[\frac{B+C+D}{2} - 1\right]$ ou $\frac{6-B-C-D}{2}$, ou $\frac{2-B+4-C+2-D-2}{2}$. Or, dans notre trièdre ACDB′B, $2-B$ est le dièdre qui a pour arête AB, $2-D$ celui qui a pour arête AD, $4-C$ celui qui a pour arrête AC; sa mesure est $\frac{(2-B)+(2-D)+(4-C)}{2} - 1$. Donc, etc.

3° Soit (fig. 274) un angle polyèdre convexe ABCDEF; décomposez-le en trièdres au moyen de plans menés par une arête AB; le nombre de ces trièdres est égal au nombre des faces moins 2. De là la mesure énoncée.

4° Si enfin il s'agit d'un angle polyèdre non convexe, pourvu qu'aucune face ne soit rencontrée par plus de deux autres (aucune n'étant prolongée), on prendra dans l'angle une droite menée par son sommet, et on raisonnera à peu près comme sur le polygone non convexe à la pr. 24, l. 1.

Remarque 1. La comparaison des angles polyèdres est donc ramenée à celle des longueurs.

Remarque 2. Le trièdre (fig. 273) a pour mesure $\frac{A+B+C-2}{2}$. Celle du trièdre trirectangle est donc $\frac{3-2}{2}$,

ou $\frac{1}{2}$. Par suite, le trièdre OABC est au trièdre trirectangle $:: \frac{A+B+C-2}{2} : \frac{1}{2}$ ou $:: A+B+C-2 : 1$. De sorte que la mesure d'un trièdre, rapporté au trièdre trirectangle pris pour unité, est $A+B+C-2$, c'est-à-dire la somme de ses dièdres rapportés au dièdre droit, moins 2 droits, ou la somme de leurs sections droites rapportées à l'angle droit, moins 2. — Résultat semblable pour les angles polyèdres.

Déf. 1. La similitude reste définie comme au livre 3 (déf. 5); on appelle *plans homologues* deux plans dont l'un contient 3 points homologues de 3 points de l'autre. Le rapport des dimensions homologues est toujours égal à celui de similitude; et si deux figures semblables sont semblablement placées, les droites homologues sont parallèles (l. 3, déf. 9), par suite les plans homologues aussi.

Remarque. D'ailleurs, ainsi qu'on l'a fait observer l. 5, pr. 50, la pr. 15, l. 3 et ses corollaires subsistent. De là il suit que dans l'espace, toute figure semblable à une figure plane est plane; car pour construire cette figure semblable, on peut prendre le centre de similitude dans le plan de la figure donnée, et alors la figure cherchée est évidemment plane. Par suite, à toute face plane d'une figure répondent, dans ses semblables, des faces planes, de sorte que toute figure semblable à un polyèdre est un second polyèdre d'autant de faces que le premier. Or, chaque face étant déterminée par ses sommets, il s'ensuit que deux polyèdres sont semblables si leurs sommets forment deux systèmes semblables, et que les faces soient déterminées de part et d'autre par des sommets homologues.

PROPOSITION III.

Théorème. — Fig. 275.

*Dans deux polyèdres semblables, les faces homologues **sont semblables**, assemblées par des sommets homologues, et*



les angles polyèdres homologues sont égaux ou symétriques, selon que la similitude est directe ou inverse, et réciproquement.

Soient ABCDEFGH... un polyèdre; *abcdefgh*... un second polyèdre directement semblable au premier et semblablement placé; O le centre de similitude. A chaque face ABCD, ADEF du premier polyèdre, répond une face semblable *abcd*, *adef* dans le second. Ces faces sont assemblées de part et d'autre par des sommets homologues. D'ailleurs, les angles polyèdres homologues tels que A, *a*, ont les arêtes homologues parallèles et sont égaux. Dans le cas de la similitude inverse, etc.

Réciproquement, soient deux polyèdres ABCD...; $a'b'c'd'$..., compris sous des faces semblables chacune à chacune, formant des angles polyèdres égaux chacun à chacun : je dis que ces deux polyèdres sont semblables. Supposons que les sommets homologues des faces semblables soient ceux qui portent les mêmes lettres. Sur *ab* égal à $a'b'$, et pris comme homologue de AB, faites un polyèdre *abcd*... semblable à ABCD... La face *abcd* sera semblable à ABCD; $a'b'c'd'$ l'est aussi, et comme *ab*, $a'b'$, homologues à AB, sont égales, ces deux faces le sont. On conclura de même pour les autres. L'angle polyèdre *a* sera égal à A, et comme a' l'est aussi, on aura $a = a'$. Donc les polyèdres *abcd*..., $a'b'c'd'$..., composés d'éléments égaux chacun à chacun, sont superposables. Donc $a'b'c'd'$... est semblable à ABCD...

On raisonne de même si les angles polyèdres sont symétriques.

Corollaire. Deux polyèdres réguliers d'un même nombre de faces sont semblables; car ils ont les faces semblables, les angles polyèdres égaux, etc.

PROPOSITION IV.

Théorème.

Deux polyèdres semblables peuvent se décomposer en un



même nombre de tétraèdres semblables, assemblés par des sommets homologues, et réciproquement.

Décomposez le premier polyèdre en tétraèdres; soient A, B, C, D les sommets de l'un de ces tétraèdres; *a*, *b*, *c*, *d* leurs homologues dans le second polyèdre : le tétraèdre *abcd* sera semblable à ABCD; car si les deux polyèdres proposés sont semblablement placés, les deux figures ABCD, *abcd*, le seront aussi. Donc les deux polyèdres seront décomposés, etc.

Réciproquement, si deux polyèdres sont composés de tétraèdres respectivement semblables et assemblés par des sommets homologues, ils seront semblables. C'est ce qui se démontrera comme la réciproque de proposition 14, l. 3.

PROPOSITION V.

Théorème.

Deux tétraèdres sont semblables s'ils ont :

1° *Trois faces semblables deux à deux, assemblées par des sommets homologues;*

2° *Un dièdre égal, compris entre des faces semblables chacune à chacune;*

3° *Une face semblable, adjacente à deux dièdres égaux chacun à chacun, par des arêtes homologues;*

4° *Les six arêtes proportionnelles deux à une, et assemblées dans le même ordre, de part et d'autre*, etc.

Ces propriétés se démontreront à peu près comme la prop. 12, l. 3.

Remarque. La similitude de deux polyèdres de S sommets chacun est assurée par 3 S—7 équations entre les arêtes et les angles dièdres; car l'égalité en exige 3 S—6 (l. 5, p. 49, r.), et l'égalité n'est autre chose que la similitude, le rapport de similitude étant déterminé, et =1.

PROPOSITION VI.

THÉORÈME. — FIG. 276.

Deux cylindres circulaires sont semblables, si les droites, menées par les centres des cercles directeurs, parallèlement aux arêtes respectives, sont homologues par rapport à ces cercles.

Placez les deux cercles directeurs dans le même plan en leur donnant le même centre O, pris pour centre de similitude; alors les deux droites homologues en question pourront se superposer avec une seule OA. Menez un rayon OB; par les points B, *b*, menez des arêtes; elles seront parallèles à OA; donc si de O on mène une droite OC dans leur plan, on aura OC : Oc :: OB : O*b*, et chaque point C de l'un des cylindres a son homologue *c* sur l'autre. Donc, etc.

Corollaire 1. Tous les cylindres droits sont semblables; car les axes sont, par rapport aux sections droites ou cercles directeurs, des lignes homologues.

Corollaire 2. Si deux cylindres circulaires indéfinis sont semblables et semblablement placés par rapport au centre O du cercle directeur; si, de plus, on mène dans l'un deux plans parallèles DE, D'E', et dans l'autre leurs homologues *de*, *d'e'*, les deux portions de cylindres DE. E'D', *de*, *e'd'* sont semblables.

PROPOSITION VII.

FIG. 277.

Deux cônes circulaires sont semblables si les sommets sont des points homologues par rapport aux cercles directeurs.

En plaçant le sommet au même point O, on pourra donner aux cercles directeurs pour centre de similitude ce sommet commun; les deux cercles étant dès lors semblablement placés par rapport à ce point, les rayons vecteurs menés de O aux deux circonférences, se confondent avec les arêtes

des deux cônes, qui non-seulement seront semblables, mais égaux.

Remarque. Dans deux cônes semblables, le rapport de similitude est indéterminé.

Corollaire. Deux cônes droits sont semblables si les angles sont égaux; car alors ils peuvent se superposer.

Corollaire 2. Deux portions de cône circulaires comprises dans un même cône indéfini, fig. 277, entre le sommet et deux sections respectives parallèles AB, CD, sont deux figures semblables.

Corollaire 3. — Fig. 278. Deux portions de cônes circulaires *abdc*, ABCD, comprises, la première entre les plans parallèles *ab*, *cd*, l'autre entre les plans AB, CD sont semblables, si les plans AB, CD sont les homologues de *ab*, *cd*, par rapport à un centre de similitude des deux cônes supposés semblables.

PROPOSITION VIII.

Fig. 279.

Deux surfaces de révolution sont semblables si les courbes méridiennes le sont, et si les axes sont des lignes homologues de ces courbes. Réciproquement, toute figure semblable à une surface de révolution est une seconde surface de même genre, décrite par une courbe méridienne semblable à celle de la première, autour d'un axe homologue à celui de la première.

1° Soit AB l'axe d'une surface de révolution, ACB la courbe méridienne; d'un point O de l'axe, comme centre de similitude, construisez une figure *acb* semblable à ACB, la droite AB sera une ligne homologue commune; et si toute la figure tourne autour de AB, un rayon vecteur quelconque OC donnera toujours la proportion $OC : Oc :: OA : Oa$. Ainsi chaque point de l'une des surfaces a son homologue dans l'autre. Donc, etc.

2° Réciproquement. Car soit la surface décrite par ACB



autour de AB. Afin d'obtenir une surface semblable à celle-là, prenez sur AB un point quelconque O pour centre de similitude, et un point *a* pour homologue de A ; puis, opérant dans chaque plan méridien, cherchez le lieu des points homologues à ceux qui y sont situés ; il est clair que les courbes méridiennes de la surface donnée étant toutes égales, et les lignes semblables que l'on construit ainsi, ayant de commun la dimension O*a*, homologue de OA, celles-ci sont aussi égales, et se superposeront si on en fait tourner une autour de AB. Donc la surface lieu de toutes ces courbes est de révolution autour de *ab*, homologue de AB, et sa méridienne est semblable à ACB.

Corollaire 1. On conclut de là de nouveau : 1° que les cylindres droits indéfinis sont semblables ; 2° que les cônes droits indéfinis de même angle sont semblables.

Corollaire 2. 1° Fig. 280. Deux rectangles semblables ABCD, *abcd*, tournant autour de côtés homologues AB, *ab*, décrivent des portions semblables de cylindres droits.

2° Fig. 281. Deux Δ rectangles semblables ABC, A*bc*, tournant autour de côtés homologues AB, A*b*, engendreront des figures semblables, savoir des portions de cônes droits.

3° Fig. 282. Deux trapèzes semblables ABCD, *abcd*, ayant en A, B, *a*, *b*, des angles droits, et tournant autour des côtés homologues AB, *ab*, décriront des figures semblables, qui sont encore des portions de cônes droits.

Corollaire 3. 1° Deux sphères sont semblables.

2° Les figures décrites par deux secteurs circulaires semblables (fig. 283) ODC, O*dc*, autour de rayons homologues OA, O*a*, sont semblables.

3° Les figures décrites par deux segments de cercles semblables CEF, *cef*, tournant autour de rayons homologues OA, O*a*, sont semblables.

4° Les figures décrites par deux demi-segments circulaires semblables ADH, *adh* ou DCGH, *dcgh*, tournant autour de rayons homologues OA, O*a*, sont semblables.

Corollaire 4. Dans deux cônes droits semblables, dans deux cylindres droits semblables, les figures interceptées

par des dièdres égaux ayant pour arêtes les axes, sont semblables, que les cônes ou les cylindres soient indéfinis ou non. Dans deux sphères, il en est de même pour des dièdres égaux dont l'arête passe au centre.

2° Dans deux sphères, les polygones sphériques interceptés par des angles polyèdres égaux ou symétriques, ayant pour sommets les centres, sont semblables, de même que les pyramides sphériques.

PROPOSITION IX.

1° Deux cylindres droits à axes parallèles ont une infinité de centres de similitude, situés sur 2 droites parallèles aux axes; 2° deux cônes droits semblables à axes parallèles ont pour centre de similitude tout point de la droite qui joint les sommets; 3° deux sphères ont toujours deux centres de similitude, savoir : ceux des grands cercles situés dans un plan quelconque mené par les deux centres.

La vérité de cet énoncé est facile à reconnaître.

Remarque. Trois sphères inégales et ayant leurs 3 centres distincts et non en ligne droite, ont les mêmes centres et axes de similitude que leurs grands cercles, situés dans le plan des centres.

PROPOSITION X.

Théorème.

Quatre sphères inégales ont leurs 12 centres de similitude situés 4 à 4 dans 8 plans dont aucun ne passe par les centres de 3 des sphères.

Remarquons que les axes de similitude des sphères prises 3 à 3 sont au nombre de 16. — Or, prenez les 4 centres pour sommets d'un tétraèdre. Ces 16 axes sont dans ces 4 plans, 4 axes dans chacun. — Nommons 1, 2, 3, 4 les centres des 4 sphères : leurs centres de similitude seront désignés par les assemblages de deux de ces chiffres : ainsi 12 désignera le centre de similitude directe, et 21 celui de similitude indirecte des sphères 1 et 2. — Cela posé, toutes les fois que 2 axes se coupent sur l'une des arêtes du tétraèdre des centres, ces axes sont dans un même plan. Pour reconnaître nos plans, il suffit de faire le tableau des 16 axes.

		Déterminé par les 3 centres de similitude.			Nos d'ordre des axes.
Axes de similitude	directe	12	13	23	I
		12	14	24	II
		13	14	34	III
		23	24	34	IV
	inverse	12	31	32	V
		12	41	42	VI
		13	21	32	VII
		13	41	43	VIII
		14	21	42	IX
		14	31	43	X
		23	21	31	XI
		23	42	43	XII
		24	21	41	XIII
		24	32	43	XIV
		34	31	41	XV
		34	32	42	XVI

1° Les 4 axes de similitude directe sont dans un plan : car I coupe II au point 12 ; III coupe I à 13, II à 14 ; et enfin IV coupe chacun des 3 premiers.

2° I, VI, VIII, XII	sont dans un plan.
3° II, V, X, XIV	
4° III, VII, IX, XVI	
5° IV, XI, XIII, XV	
6° V, VI, XV, XVI	
7° VII, VIII, XIII, XIV	
8° IX, X, XI, XII	

Voilà 8 plans; il n'y en a pas plus. Car au centre de similitude il s'assemble 4 axes qui, 2 à 2, déterminent 6 plans, parmi lesquels 2 plans des centres : reste 4 ; ce qui fait pour les 12 centres de similitude 48 plans. Mais chacun de ces plans contenant 4 axes et 6 centres de similitude se trouve répété 6 fois : reste 8 plans. Par exemple, au point 12 s'assemblent les 4 axes I, II, V, VI. Mais les axes I, V sont dans le plan des 3 centres 1, 2, 3 ; les axes II, VI dans celui des centres 1, 2, 4 : reste 6 plans, parmi lesquels le plan I, II contient les 6 centres de similitude 12, 13, 23, 14, 34 et 24. Ce plan se présente donc à chacun de ces six points. De même des autres. Du reste il y aurait quelques remarques sur les combinaisons des chiffres 1, 2, 3, 4, lesquels déterminent les 8 plans 1°-8°.

Déf. 2. Ces 8 plans sont les 8 *plans de similitude* : les 2 premiers, de similitude directe, les 3 suivants, de similitude mixte, les trois derniers, de similitude inverse.

PROPOSITION XI.

THÉORÈME. — FIG. 284.

Si à chaque point d'un plan on suppose le sommet d'un cône circonscrit à une sphère, les plans des cercles de contact passeront par un même point situé sur le diamètre perpendiculaire au plan; toute droite menée par ce point sera coupée harmoniquement par le plan et la sphère, et réciproquement.

Soit AB le plan, O le centre de la sphère; D le sommet d'un cône, EFG le cercle de contact de ce cône et de la sphère.

De O menez sur le plan une perpendiculaire OC, joignez son pied C au sommet du cône par la droite CD. Le plan DCO coupera la sphère en un grand cercle, le cône en deux arêtes, DE, DG tangentes à ce grand cercle, et le plan du cercle de contact en un diamètre GE servant de sécante de contact à ces tangentes. Or, il a été prouvé (l. 3) que, si OH est le rayon de la sphère, $OI \times OC = \overline{OH}^2$. Ainsi, quel que soit le point D dans le plan AB, le plan EFG coupera toujours la droite OC au même point I.

Si l'on tire DI, cette droite coupe le grand cercle en 2 points L, K; et comme I est le pôle de CD par rapport à ce cercle, les 4 points D, L, I, K sont harmoniques.

Réciproquement, si le plan GFE tourne autour du point I, le sommet D du cône décrira le plan AB.

DÉF. 3. Ce point I s'appelle le *pôle* du plan AB, lequel est dit plan *polaire*.

Remarque 1. Le plan GFE est perpendiculaire à la droite DO, et par suite au plan DCO, et si le point D se meut sur une droite CD, le plan GFE ne cessera pas d'être perpendiculaire au plan CDO, et passera ainsi constamment par une droite menée en I perpendiculairement au plan CDO. Cette droite est la corde de contact des plans tangents menés par CD, si pourtant CD ne coupe pas la sphère (l. 6).

DÉF. 4. Ces deux droites sont dites *polaires* l'une de l'autre, et l'on peut démontrer que si en un point quelconque de la seconde prolongée on place le sommet d'un cône tangent, le plan du cercle de contact passera par la première CD.

Remarque 2. Si par le point I on mène un plan perpendiculaire à OI, ce plan aura pour pôle le point C, à cause de la relation $OI \times OC = \overline{OH}^2$, laquelle montre que le rayon est moyen proportionnel entre les distances qui séparent le centre, du pôle et du plan polaire.

PROPOSITION XII.

Théorème. — Fig. 285.

Le plan polaire d'un point d'un plan passe par le pôle de ce plan, ou, ce qui revient au même, si des points sont dans un plan, leurs plans polaires concourent au pôle de ce plan.

Soit un point A d'un plan AB; joignez-le au centre O, et soit OH le rayon de la sphère; prenez OI égal à $\frac{\overline{OH}^2}{AO}$, le point I appartiendra au plan polaire, et ce plan sera perpendiculaire à OI: je dis qu'il passe par le pôle de AB. Pour le prouver, menez la droite OC perpendiculaire au plan AB; soit C son pied, K le point où elle est coupée par le plan polaire. Tirez AC qui sera perpendiculaire à OC, comme KI l'est à OI, vu que le plan polaire l'est. Les $\triangle$ semblables AOC, IOK donnent OI:OC::OK:OA;

d'où OI. OA=OC. OK et par suite = $\overline{OH}^2$.

Donc K est le pôle du plan AC. — On prouvera de même que le plan polaire de tout autre point de AB passe en K.

Corollaire. Si des points sont sur une droite, leurs plans polaires se coupent sur la polaire de cette droite. — Car les plans polaires de tous les points de AC passent en K et sont perpendiculaires au plan ACO, vu que celui de A est perpendiculaire à AO. Donc ils se coupent en une droite menée par K, perpendiculairement au plan AOC, laquelle est la polaire de AC. De même les plans polaires des points de IK passeront en A, seront perpendiculaires au plan IKO, et se couperont en une droite menée par A perpendiculairement à ce plan, laquelle sera la polaire de IK.

Remarque. Si donc on a une figure quelconque, composée de plans, de droites, de points, qu'on cherche par rapport à une sphère les pôles de ces plans, les polaires des droites, les plans polaires des points, on aura deux figures corrélatives en ce sens, que pour chaque système de plans qui concourent en un point, dans l'une des figures, il y aura dans l'autre autant de points situés dans un plan, et réciproquement pour chaque système de plans se coupant sur une ligne droite, dans l'une des figures, on aura dans l'autre un système de points situés sur une droite. — Ces deux figures sont aussi appelées *réciproques*, et on peut leur appliquer les considérations exposées l. 3, appendice.

PROPOSITION XIII.

Théorème.

Si deux cercles et leur disomologue tournent autour de la ligne des centres, le plan décrit par la disomologue sera le lieu des points d'où l'on peut mener aux deux sphères des tangentes toutes égales.

Car si en un point de ce plan, que nous nommerons *plan disomologue*, on imagine le sommet commun de deux cônes circonscrits aux sphères, les arêtes de chaque cône, prises du sommet à la sphère correspondante, sont égales ; le plan des axes de ces cônes coupe les sphères suivant de grands cercles, le plan disomologue suivant leur disomologue. Donc les tangentes menées de ce point à ces grands cercles sont égales. — Donc, etc.

Déf. 5. Les plans disomologues de 3 sphères se coupent en une droite perpendiculaire au plan des centres, menée par l'intersection des disomologues des grands cercles situés dans ce plan, et nommée *axe disomologue*.

PROPOSITION XIV.

Théorème.

Les six plans disomologues de 4 sphères prises 2 à 2 se coupent en un point.

Car les plans disomologues des 3 premières se coupent en une droite; le plan disomologue de l'une des 3 premières et de la 4ᵉ coupera cette droite en un point qui sera, ou hors de chacune des 4 sphères, ou dans chacune, ou sur la surface de chacune. En effet, si ce point est hors d'une sphère, on pourra, de ce point, mener des tangentes à cette sphère, et par conséquent à toutes. Donc il est hors de chacune. Dans ce cas, on pourra de ce point mener aux 4 sphères des tangentes égales. Par suite, il appartient à tous les 6 plans disomologues et aux 4 axes disomologues.

Dans le second cas, les sphères se coupent 2 à 2 suivant des cercles; 3 à 3 en 2 points. — Nommons S, S′, S″, S‴ les 4 sphères.

Les 3 sphères S, S′, S″ se coupent en deux points : je nomme D″ la droite qui les joint; elle est dans le plan du cercle commun à S, S′ (cercle SS′) ; les sphères S, S′, S‴ déterminent de même une droite D′ située dans SS′ ; D″ et D′ se coupent en un point situé dans les plans SS′, SS″, SS‴, S′S″, S′S‴ : je dis qu'il est aussi sur S″S‴; car D″ est à l'intersection de SS′, SS″, S′S″ ; D′ à celle de SS′, SS‴, S′S‴. D'ailleurs, S′S″, S′S‴ passant par ce point, leur intersection y passe ; mais S″S‴ contient cette intersection qui s'appelle D. Donc S″S‴ passe par ce point.

Les plans SS″, SS‴, S″S‴ se coupent en une 4ᵉ droite D′ qui y passe aussi.

Ce point peut être appelé pôle *disomologue*.

PROPOSITION XV.

Théorème. — Fig. 286.

Si 2 sphères C, C′ sont touchées par une 3ᵉ de la même manière en D, D′, le plan disomologue des 2 premières est, par rapport au point de contact de la 1ʳᵉ avec la 3ᵉ, l'homologue du plan polaire de leur centre de similitude directe, plan pris par rapport à la 1ʳᵉ. — De même pour la seconde. —

Si les sphères sont touchées de différentes manières, c'est le centre de similitude inverse qu'il faut prendre.

Nous ne représenterons que ce qui se passe dans le plan des 3 centres.

1° Les plans tangents en D, D' se coupent en une droite G qui est l'axe disomologue des 3 sphères; ainsi le plan GH perpendiculaire à CC' est le plan disomologue de C, C'.

2° Les plans tangents en E, D se coupent en une droite F, et le plan FI mené par F perpendiculairement à CC' est le plan polaire de S par rapport à C.

3° Or les points E, D' sont homologues par rapport à D; les plans D'G, FE le sont donc; par suite les droites G, F le sont, ainsi que les plans GH, FI.

PROPOSITION XVI.

Théorème. — Fig. 166.

Si 3 sphères sont touchées par une 4ᵉ de la même manière, la polaire de l'axe de similitude directe des 3 premières, polaire prise par rapport à la 1ʳᵉ sphère, est homologue de leur axe disomologue par rapport au point de contact de la 1ʳᵉ avec la 4ᵉ.

Soient O, O', O'' les 3 premières; X la 4ᵉ, — E son point de contact avec O : le plan des 3 points de contact passe par l'axe de similitude des 3 sphères. — Axe SS'S''. — Le plan polaire de S'' dans O et le plan disomologue de O, O' sont homologues par rapport à E; le plan polaire de S' dans O et le plan disomologue de O, O'' sont homologues par rapport à E. Donc l'intersection des plans polaires, c'est-à-dire la polaire de SS'S'' est, par rapport à E, homologue de l'intersection des plans disomologues, axe disomologue de O, O', O''.

Remarque. Si 4 sphères O, O', O'', O''' sont touchées de la même manière par X, le pôle du plan de similitude directe dans O et le pôle disomologue sont homologues par rapport au point de contact de X et O.

En effet la polaire de SS'S'' est, par rapport à E, homologue de l'axe disomologue de O, O', O''. La polaire de SS'S'' est, par rapport à E, homologue de l'axe disomologue de O, O', O'''. Donc le point d'intersection de ces polaires, pôle du plan SS'S'S'', est homologue du pôle disomologue de O, O', O'', O'''.

Ainsi : prenez les 32 pôles des 8 plans de similitude; joignez-les au pôle disomologue; chacune des 32 droites ainsi obtenues coupe la sphère correspondante en 2 points : total 64 points, qui seront les points de contact de 16 sphères tangentes aux 4 sphères données.

Savoir : 1 touchée par les 4;
1 enveloppant les 4;
4 dont chacune en enveloppe 1, en touche 3;
4 — — 3, — 1;
6 — — 2, — 2.
16

LIVRE VIII.

LES FIGURES DANS L'ESPACE.

GRANDEUR RELATIVE DES AIRES ET DES VOLUMES

COMPARÉS PAR L'INTERMÉDIAIRE DE LA LONGUEUR.

§ 1. AIRES.

PROPOSITION I.

THÉORÈME. — FIG. 238.

La surface latérale d'un prisme est égale à l'arête AA' *multipliée par le contour d'une section droite* KLMNO.

Car cette surface se compose d'une série de ▱ AB', BC', CD', etc., dont chacun a pour mesure le produit de la base par la hauteur. Mais le plan KLMNO étant perpendiculaire aux arêtes AA', BB', etc., il s'ensuit que ces arêtes sont perpendiculaires aux droites KL, LM, etc., si-

tuées dans ce plan (I.5). Donc, si l'on prend AA', BB', etc., pour bases de ces ▱, les hauteurs seront KL, LM, MN, etc. Ainsi la surface AB' a pour mesure

$$AA' \times KL,$$

de même, la surface BC' a pour mesure

$$BB' \times LM \text{ ou } AA' \times LM,$$

et ainsi des autres. Donc la somme de ces ▱ a pour mesure $AA' \times (KL + LM + \text{etc.})$, c'est-à-dire l'arête AA' multipliée par le contour de la section KLMNO perpendiculaire aux arêtes.

Corollaire. Si le prisme est droit, la section KLMNO est égale à la base, et la surface convexe du prisme est égale à son arête ou à sa hauteur, multipliée par le périmètre de la base.

Déf. 1. — Fig. 287. Une pyramide est dite *régulière*, si la base ABCDEF est un polygone régulier, et que la hauteur SO passe au centre O de cette base. La surface latérale d'une pareille pyramide se compose de Δ isocèles égaux, SAB, SBC, etc. Car les rayons du polygone, AO, BO, etc., étant égaux, les arêtes AS, BS, etc., sont égales comme obliques qui s'écartent également de la perpendiculaire. Donc ces Δ sont équilatéraux entre eux et d'ailleurs isocèles. La hauteur SG de l'un de ces Δ, ligne qui a la même longueur pour tous, se nomme l'*apothème* de la pyramide.

PROPOSITION II.

Théorème. — Fig. 287.

La surface d'une pyramide régulière est égale au périmètre de la base multipliée par la moitié de l'apothème SG.

Car l'aire du Δ SAB est égale à $AB \times \frac{1}{2} SG$; il en

est de même des autres Δ SBC, SCD, etc. Donc la somme de ces Δ est égale à $(AB + BC + \ldots + FA) \times \frac{1}{2}$ SG.

Déf. 2. Dans le reste de ce livre, les dénominations cylindre circulaire, cône circulaire, signifient respectivement portion de cylindre circulaire comprise entre deux sections circulaires, portion de cône circulaire, terminée par le sommet et une section circulaire. S'il s'agit de cylindre droit ou de cône droit, ces sections seront perpendiculaires à l'axe.

PROPOSITION III.

Théorème.

La surface convexe du cylindre droit est égale à la circonférence de la base multipliée par la hauteur.

Le cylindre droit peut, quant à sa surface, être regardé comme un prisme droit à faces infiniment petites, ayant pour base celle du cylindre. En effet, soient deux prismes réguliers, l'un inscrit au cylindre, l'autre circonscrit, ayant des bases semblables et infinitésimales : la différence des surfaces convexes de ces prismes est égale à la hauteur multipliée par la différence des contours des bases, laquelle est infiniment petite, de sorte que la différence des surfaces convexes l'est aussi. Nommons p la surface convexe du prisme inscrit, P celle du prisme circonscrit, C celle du cylindre, d la différence des aires des bases du prisme inscrit et du cylindre, D la différence des aires des bases du cylindre et du prisme circonscrit. On aura

$$p < C + d, \quad C < P + D$$

ou

$$C > p - d, \quad C < P + D.$$

Or d, D sont infiniment petits (I. 4), de même que la différence entre P et p ; donc $p - d$ et $P + D$ diffèrent infiniment peu l'un de l'autre et de C ; donc, dans toute relation entière où l'on supprime les infiniment petits, P ou p peut

être remplacé par C. Mais $p =$ *contour de la base* $\times$ *par la hauteur*; donc C $=$ *circ. de la base* $\times$ *par la hauteur* : de sorte que si r est le rayon de la base, h la hauteur, on a

$$C = 2\pi rh.$$

Déf. 3. Le *fuseau cylindrique* est la partie de la surface, terminée à deux arêtes. Il a pour mesure l'arc qui lui sert de base multiplié par la hauteur.

PROPOSITION IV.

Théorème. — Fig. 288.

La surface convexe du cône droit est égale à la circonférence de la base multipliée par la moitié de l'arête.

Le cône peut, quant à sa surface, être regardé comme une pyramide régulière, à faces infiniment petites. En effet, soient BC, B'C' des côtés de polygones réguliers infinitésimaux, semblables et semblablement placés par rapport au centre O de la base du cône, l'un de ces polygones étant inscrit, l'autre circonscrit à cette base; soient OI, OI' leurs apothèmes, A le sommet du cône, AI, AI' seront les apothèmes des pyramides régulières ayant ces polygones pour bases, et A pour sommet commun. Or, la différence entre AI' et AI est moindre que II'; elle est donc infiniment petite; la différence des contours des polygones l'est aussi; par suite, il en est de même de la différence des surfaces latérales des pyramides. — Cela posé, soient C, P, p les surfaces latérales respectives du cône, de la pyramide circonscrite, et de la pyramide inscrite, nommons d la différence des aires des bases de C et p, D la différence des aires des bases de C et P. On aura :

$$p < C + d \quad C < P + D,$$

d'où

$$C > p - d \quad C < P + D,$$

d'où l'on conclura encore que C diffère infiniment peu de P et p. Or, la surface latérale de la pyramide circonscrite $= \frac{1}{2}$ AI' $\times$ *contour de la base*. Donc, passant aux finies absolues,

$$C = \frac{1}{2} \text{AI}' \times \textit{circonférence OB}.$$

Si a est l'arête AI', r le rayon OB, on aura $C = \frac{1}{2} a \times 2\pi r = \pi r a$.

DÉF. 4. Le *fuseau conique* est sur le cône la partie de la surface latérale comprise entre deux arêtes. Il a pour mesure l'arc qui lui sert de base multiplié par la moitié de l'arête.

DÉF. 5. — FIG. 282. Le tronc de *cône* est une portion de cône comprise entre deux sections circulaires parallèles nommées *bases*. La *hauteur* du tronc est la distance de ces bases. Dans le tronc de cône droit, la partie CD, que les plans des bases interceptent par l'arête, est le *côté* ou l'*arête* du tronc.

PROPOSITION V.

THÉORÈME. — FIG. 289.

La surface convexe du tronc de cône droit est égale à son arête multipliée par la demi-somme des circonférences des bases, ou, multipliée par la circonférence de la section faite à égales distances des bases.

Soit abBA le tronc de cône, C c les centres des bases, D le sommet du cône total. A ce cône, circonscrivez une pyramide régulière à base infinitésimale; soit DEF une de ses faces, DG son apothème, qui est une arête du cône. Le plan akb déterminera avec le plan AKB un tronc de pyramide,

dont nous supposons que $EFfe$ soit une face, et Gg l'apothème. Il est prouvé que les surfaces latérales des pyramides DEF..., Def... diffèrent infiniment peu de celles des cônes inscrits (p. 4) ; donc la surface latérale du tronc de pyramide, différence des pyramides, diffère infiniment peu de celle du tronc de cône, différence des cônes. Or trapèze $EFfe = \frac{EF + ef}{2} \cdot Gg$; donc *surf. tronc de pyr.* $= Gg \times \frac{(\textit{Contour } EF... + \textit{contour } ef...)}{2}$ et *surf. tronc de cône* $= Gg \times \frac{(\textit{Circ. } AC + \textit{circ. } ac)}{2}$.

Et si $a'k'b'$ est une section faite dans le tronc de cône à égale distance des bases, $e'f'$... la section correspondante du tronc de pyramide, on a

$$\textit{Surf. tronc de pyr.} = Gg \times \textit{contour } e'f'...$$
et $$\textit{surf. tronc de cône} = Gg \times \textit{circ. } a'c'.$$

Remarque. Dans un cône droit, la section faite à égale distance entre le sommet et la base a pour rayon la moitié de celui de la base ; la circonférence est donc aussi la moitié de celle de la base, et le cône entier a aussi pour mesure de sa surface convexe son côté multiplié par la circonférence de cette section.

Remarque. 1° Soit (fig. 290) un cylindre droit ABDC ; sur l'arête AC, et sur une droite AE perpendiculaire à AC et égale à la circonférence de la base, construisez le rectangle AEFC ; son aire sera égale à la surface convexe du cylindre ; si l'on place les circonférences des bases de façon que leurs plans soient perpendiculaires au plan AF, l'une touchant AE en A, l'autre CF en C, on pourra faire rouler ces circonférences, l'une sur AE, l'autre sur CF, et le cylindre roulera sur le plan EF, de façon que sa surface s'applique successivement sur celle de ce rectangle. Réciproquement on pourra envelopper le rectangle sur le cylindre.

2° Soit (fig. 291) un cône droit ABCD ; du point A comme centre, et du rayon AB décrivez un arc BE égal en longueur à la circonférence CB, et tirez AE ; la surface du secteur ABE sera égale à celle du cône, et si l'on fait rouler le cône sur le plan, de façon que le point A reste fixe, la circonférence BC se développera sur l'arc BE, et le cône sur le secteur ABE.

Si, au lieu du cylindre, on prend un prisme infinitésimal inscrit, et, au lieu du cône, une pyramide infinitésimale inscrite, on pourra rendre sensible d'une autre manière cette propriété, qui consiste en ce qu'une portion de plan peut être pliée sur la surface, ou réciproquement. Ces sortes de surfaces courbes se nomment *surfaces développables*.

PROPOSITION VI.

Théorème. — Fig. 292.

La surface décrite par une ligne brisée régulière tournant autour d'un diamètre extérieur, a pour mesure sa projection sur ce diamètre, multipliée par la circonférence du cercle inscrit.

Soit ABCD la ligne brisée régulière, IL le diamètre ou axe, O le centre ; projetez les points A, B, C, D sur l'axe en E, F, O, H ; la surface décrite par AB tournant autour de EF, est celle d'un tronc de cône droit, dont AB serait l'arête, AE, BF les rayons des bases. Si donc du point K, milieu de AB, on mène KM perpendiculaire à IL, cette surface a pour mesure 2πKM.AB (p. 5). Tirez KO qui sera perpendiculaire à AB, et projetez A sur BF, en P ; les Δ ABP, KMO seront semblables comme ayant les côtés respectivement perpendiculaires, savoir : AP à MK, AB à KO, BP à MO. Donc on a (l. 3, p. 13)

$$KO : KM :: AB : AP \text{ ou } EF,$$

de là $$KO.EF = KM.AB$$

et

$$2\pi.KO.EF = 2\pi.KM.AB = \text{Surf. décrite par } AB \ldots \text{ ou } surf.AB.$$

De même *surf.* $BC = 2\pi KO.FO$; *surf.* $CD = 2\pi.KO \times OH$.
Donc *surf.* $ABCD = 2\pi KO.EH$.

Or EH est la projection du contour ABCD; $2\pi KO$ est la circonférence du cercle inscrit; donc, etc.

Il est supposé que le contour ABCD n'est pas coupé par l'axe prolongé; cependant la même propriété subsiste si un des côtés AI se termine sur l'axe : ainsi *surf.* $IABCD = 2\pi KO.IH$.

Il en serait de même si le dernier côté se terminait aussi sur l'axe.

Déf. 6. — Fig. 293. On appelle *zone sphérique* la surface décrite par un arc pris sur une demi-circonférence AB, tournant autour de son diamètre CF. La projection DE de l'arc AB sur le diamètre ou axe, se nomme la *hauteur* de la zone. Les cercles décrits par AD, BE sont les *bases* de la zone. L'arc AC, tournant autour de CF décrit une zone à une base ou *calotte*, dont la hauteur est DC.

PROPOSITION VII.

Théorème. — Fig. 294.

L'aire de la zone sphérique est égale à sa hauteur multipliée par la circonférence d'un grand cercle, et la surface de la sphère est égale au diamètre multiplié par la circonférence d'un grand cercle.

Soit la zone décrite par l'arc AB tournant autour du diamètre IK, O étant le centre de la sphère. Inscrivez à cet arc une ligne brisée régulière infinitésimale ACDB, circonscrivez une ligne A'C'D'B', semblable et semblablement placée par rapport à O. La zone est comprise entre les surfaces décrites par les polygones ACDB, AA'C'D'B'B'; cette dernière comprend les deux troncs de cônes infiniment petits décrits par AA', BB', et la surface décrite par A'C'D'B'. Or, soient $a'b'$, ab les projections de A'C'D'B', ACDB sur l'axe IK, OF l'apothème du dernier de ces polygones. On a *surf.* $A'C'D'B' = 2\pi OB \times a'b'$, *surf.* $ACDB = 2\pi OF \times ab$.

Mais la différence entre OB et OF est infiniment petite ; la différence entre $a'b'$ et ab, moindre que 2BB', est aussi infiniment petite. Donc, il en est de même de la différence des deux surfaces qui comprennent la zone.

Cela posé, on a *surface* $A'C'D'B' = 2\pi OB \times a'b'$; supprimant les infiniment petits,

$$\textit{zone}\ AB = 2\pi OB \times ab.$$

S'il s'agit de la demi-circonférence, la zone devient la sphère, et sa mesure.

$$= 2\pi OB \times \textit{diamètre}.$$

$$= \textit{Circonférence}\ OB \times \textit{diamètre}.$$

Remarque. Cette expression est égale à $2\pi OB \times 2OB$ ou à $\pi.(2.\ OB)^2$.

Soit d le diamètre, r le rayon ; cette expression devient à volonté πd^2 ou $\pi.4r^2 = 4\pi r^2$, ce qui est le quadruple de l'aire du grand cercle : car cette dernière aire est πr^2 (l. 4, p. 7).

Déf. 7. On appelle *fuseau sphérique* (fig. 295) la partie de la surface de la sphère comprise entre deux demi-grands cercles ACB, ADB, terminés à un diamètre commun, et nommés les *faces* du fuseau ; le dièdre des faces est appelé l'*angle* du fuseau. Si l'on mène un grand cercle CDE perpendiculaire au diamètre AB, l'arc CD compris entre les faces du fuseau a même mesure que le dièdre en question ; on l'appelle *l'arc* du fuseau.

PROPOSITION VIII.

Théorème. — Fig. 295.

L'aire du fuseau sphérique est égale à son arc multiplié par le diamètre.

Il est évident que sur une même sphère deux fuseaux de même arc, et par conséquent de même angle, sont superposables. Que si l'arc CD est à la circonférence CDEF, par



exemple $::2:13$, c'est que l'arc CD peut être divisé en deux parties égales, et la circonférence en contient treize ; à ces différents arcs répondront des fuseaux partiels, égaux ; le fuseau BCADB en contiendra deux, et la sphère treize ; donc le fuseau est à la sphère $::2:13$; donc *fuseau* $=\frac{2}{13}\times$ *sphère* $=\text{AB}\times\frac{2}{3}$ *circ.* OC ; or arc CD $=\frac{2}{13}$ *circ.* OC. Donc *fuseau* $=\text{AB}\times\text{CD}$.

Si l'arc n'est pas commensurable avec circonférence OC, le même résultat a encore lieu.

Remarque. Soit A l'angle du fuseau, D l'angle droit, r le rayon de la sphère : on aura CD : *circ.* $\text{OC}::\text{A}:4\text{D}$ ou $\text{CD}=\frac{2\pi r\text{A}}{4\text{D}}$.

$$Fuseau=2r\times\frac{2\pi r\text{A}}{4\text{D}}=\frac{\pi r^2\text{A}}{\text{D}}.$$

Si l'on prend pour unité de surface le ⌔ trirectangle qui équivaut au huitième de la sphère, et dont la mesure est ainsi $\frac{1}{8}\,4\pi r^2$ ou $\frac{1}{2}\pi r^2$; si de plus on prend pour unité d'angle l'angle droit, la mesure du fuseau sera double de celle de son angle ; car de la valeur du fuseau on tire

$$fuseau : \pi r^2 :: \text{A}:\text{D},$$

ou

$$fuseau : \frac{1}{2}\pi r^2 :: 2\text{A}:\text{D}.$$

Or, dans notre hypothèse, le premier rapport est la mesure du fuseau ; le second est le double de la mesure de son angle ; donc, nommant F l'aire du fuseau, A' la mesure de son angle, c'est-à-dire $\frac{\text{A}}{\text{D}}$, on a $\text{F}=2\text{A}'$.

PROPOSITION IX.

Théorème. — Fig. 296.

Si l'on prend pour unité de surface le △ trirectangle, et pour unité d'angle l'angle droit, l'aire d'un polygone sphérique est égale à la demi-somme de ses angles moins deux angles droits répétés autant de fois qu'il y a de côtés moins deux; et cette expression multipliée par $\frac{1}{8}\pi r^2$, *aire du △ trirectangle, donnera celle du polygone rapportée au carré de l'unité linéaire.*

1° Soit un △ convexe ABC; prolongez l'arc AB pour achever la circonférence ABEF; tirez des diamètres par A, B, C, et prolongez les arcs BC, AC chacun d'une demi-circonférence jusqu'en G. Les △ ABC, BCE forment ensemble le fuseau ABEC, dont je nomme A l'angle rapporté à l'angle droit. Donc ABC+BCE=2A. De même les △ ABC, ACF, forment le fuseau BAFC, dont l'angle est ABC ou B, de sorte que ABC+ACF=2B. Les △ABC, EGF sont symétriques, et par suite équivalents; or, EGF+FCE=fuseau GFCE dont l'angle est égal à l'angle C du △ABC; par suite, ABC+FCE=2C. Ajoutant ces trois égalités, on a les △ BCE+ACF+FCE+ trois fois ABC, valant en somme 2A+2B+2C; or, ces △ font ensemble la demi-sphère+2ABC, et comme l'hémisphère vaut quatre △ trirectangles, c'est-à-dire quatre unités, on a :

$$4+2ABC=2A+2B+2C,$$

d'où

$$ABC=A+B+C-2.$$

2° Le △ sphérique non convexe ACBEF vaut la demi-sphère moins ABC,

ou

$$4-(A+B+C-2)=6-A-B-C=(2-A)+(2-B)+(4-C)-2$$

Or, 2—A, 2—B sont dans ce △ les angles en A et B; 4—C est l'angle en C. Donc, etc.

3° Soit (fig. 253) un polygone sphérique convexe ABCDE; prenez dans l'intérieur un point O, et joignez-le aux sommets du polygone par les arcs de grand cercle OA, OB, OC, etc. Chacun des ⌔ AOB, etc., a pour mesure la somme de ses angles moins deux droits; donc le polygone a pour mesure la somme de tous ses angles, y compris ceux qui sont formés autour de O, moins deux droits multipliés par le nombre des côtés, c'est-à-dire $A+B+C+D+E+4-2.5$, ou $A+B+C+D+E-2(5-2)$; en général, la somme des angles moins $2(n-2)$, si n est le nombre des côtés.

4° Si le polygone n'est pas convexe, on raisonne comme à la proposition 2, l. 7, avec laquelle la proposition actuelle a, comme on voit, la liaison la plus intime.

Remarque. Soit T un ⌔ rapporté au carré fait sur l'unité de longueur, A, B, C ses angles rapportés à une unité quelconque, D l'angle droit, r le rayon de la sphère; le ⌔ trirectangle sera $\frac{1}{2}\pi r^2$; la mesure de T rapporté à ce dernier sera $\frac{T}{\frac{1}{2}\pi r^2}$, et elle est égale à $\frac{A+B+C-2D}{D}$, d'où

$$T=\frac{1}{2}\pi r^2.\frac{A+B+C-2D}{D}.$$

Soit P un polygone sphérique, S la somme de ses angles, n le nombre de ses côtés; on aura de même

$$P=\frac{1}{2}\pi r^2\frac{[S-2D(n-2)]}{D}.$$

PROPOSITION X.

Théorème.

Les aires des figures semblables sont comme les carrés des dimensions homologues.

1° Soient deux polyèdres semblables: nommons A, B, C, D...

les faces de l'un ; a, b, c, d... leurs homologues dans l'autre ; nommons (AB) l'arête commune aux faces A et B, et de même des autres. Les faces A,B,C,D... étant semblables à a, b, c, d... on a :

$$A : a :: (AB)^2 : (ab)^2,$$
$$B : b :: (AB)^2 : (ab)^2,$$

d'où $A : a :: B : b$, et de même $:: C : c :: D : d ::$, etc.

De là,

$$A+B+C+\dots : a+b+c+\dots :: A : a \text{ ou } :: (AB)^2 : (ab)^2.$$

Mais A+B+C... est l'aire du premier polyèdre ; $a+b+c$... celle du second ; donc, etc.

2° Soient deux cylindres droits semblables, R, r leurs rayons, H, h leurs hauteurs ; A, a leurs surfaces convexes ; on a :

$$A = 2\pi RH \,;\; a = 2\pi rh,$$

d'où $A : a :: RH : rh$.

Mais la similitude donne $R : r :: H : h$.

Multipliant les antécédents par H, les conséquents par h, on a :

$$RH : rh :: H^2 : h^2.$$

Donc, $A : a :: H^2 : h^2 :: R^2 : r^2$.

Même raisonnement pour les fuseaux cylindriques semblables, les cônes droits semblables, les fuseaux coniques semblables, les troncs de cônes semblables.

Ces propriétés sont encore vraies pour les surfaces totales de nos figures ; car, par exemple, pour les cylindres, de la proportion $A : a :: R^2 : r^2$,

on déduit $A : a :: 2\pi R^2 : 2\pi r^2$;

ensuite, $A+2\pi R^2 : a+2\pi r^2 :: 2\pi R^2 : 2\pi r^2$,
$:: R^2 : r^2$.

Or, $A+2\pi R^2$ est la surface totale du premier cylindre, etc.

2° Soient deux sphères de rayons R, r ; leurs aires sont $4\pi R^2$, $4\pi r^2$, quantités qui sont $:: R^2 : r^2$ ou :: les carrés des diamètres.

3° Deux zones dont les hauteurs sont H, h, et les rayons R, r, ont pour aires $2\pi RH$ et $2\pi rh$, valeurs qui sont $::RH:rh$; mais les zones étant semblables, on a $R:r::H:h$; donc $RH:rh::R^2:r^2::H^2:h^2$.

4° Deux fuseaux sphériques semblables ont même angle. Or, la mesure du fuseau est (p. 8) $\frac{\pi r^2 A}{D}$; donc les aires des fuseaux semblables sont comme les carrés des rayons.

5° Deux polygones sphériques semblables, etc.

PROPOSITION XI.

THÉORÈME. — FIG. 297.

Si deux pyramides ABCDE, FGHI, *qui ont même hauteur et leurs bases sur un même plan, sont coupées par un plan parallèle aux bases, les sections* bcde, ghi, *sont entre elles comme les bases.*

En effet, les figures BCDE, *bcde* sont semblables et semblablement placées par rapport au point A ; donc,

$$BCDE:bcde::\overline{BC}^2:\overline{bc}^2::\overline{AB}^2:\overline{Ab}^2.$$

De même $$GHI:ghi::\overline{FG}^2:\overline{Fg}^2.$$

Or, la hauteur étant la même, on a (l. 5, pr. 57, r.)

$$AB:Ab::FG:Fg;$$

Donc $$BCDE:bcde::GHI:ghi.$$

Corollaire. Si les bases BCDE et GHI étaient équivalentes, les sections *bcde*, *ghi* le seraient.

§ 2. VOLUMES.

On multiplie et on divise facilement le volume d'un ▭ par un nombre entier; c'est donc également une opération simple que de multiplier un pareil corps par un nombre fractionnaire. De là on passe au cas où le multiplicateur est un nombre incommensurable. (*Arithm.*, l. 3.)

Cela posé, le rapport de deux ▱ est un nombre abstrait tel que le produit du second ▱ par ce nombre est égal au premier, et en général :

Déf. 8. Le *rapport* des volumes de deux corps est un nombre abstrait tel que le produit du second corps par ce nombre est égal au premier. Le rapport est donc toujours un quotient, et si nous disons qu'un corps M est à un corps N, par exemple, comme 2:11, il faut entendre que M vaut les $\frac{2}{11}$ de N. Réciproquement, si N est divisé en 11 parties égales, et que M contienne exactement deux de ces parties, on dira que M:N::2:11 (comparez l. 3, p. 2, d. 3, et l. 4, d. 2).

A l'appui de cette définition, remarquez que si dans un ▱, fig. 298, sans toucher à la base AD, on fait varier l'arête AF infiniment peu, le ▱ varie aussi infiniment peu, de sorte que si l'arête AF varie d'une manière continue depuis zéro jusqu'à l'infini, le volume du ▱ varie de même. Donc, pour établir la notion du rapport des volumes de deux corps, on peut toujours les supposer remplacés par des ▱ ayant même base ABCD, et un angle trièdre commun en A. Dès lors l'idée du rapport des volumes de ces corps devient très-nette et très-précise.

Remarque. Le mot *mesure* a été défini au l. 3.

Déf. 9. Le mot *équivalent* s'applique aux volumes comme aux aires (l. 4).

PROPOSITION XII.

Théorème. — Fig. 298.

Si deux ▱ AA', GG' *ont un angle trièdre égal* (A=G), *leurs volumes sont entre eux comme les produits des arêtes qui forment de part et d'autre l'angle égal, de sorte qu'on a*

$$AA':GG'::AB\times AC\times AF:GK\times GH\times GL.$$

Supposons qu'on ait $AB : GK :: 7 : 4$

$$AC : GH :: 3 : 2 \qquad (1)$$

$$AF : GL :: 11 : 5,$$

les arêtes que l'on compare étant celles qui prennent la même direction lorsqu'on superpose les angles A et G.

On pourra (l. 4, p. 1) décomposer la base AD en 7×3 ▱ égaux, la base GI en contiendra 4×2. Si par les sommets de ces ▱ on mène des parallèles aux arêtes latérales dans chacun des deux corps, le premier AA′ pourra se décomposer en 7×3 ⧈ égaux, ayant pour bases les parties de la base AD, et pour arêtes latérales des lignes égales à AF. Dans GG′, les différentes parties auront des arêtes latérales égales à GL, et le nombre en sera 4×2.

Divisons maintenant AF en 11 parties égales; GL en contiendra 5. Si par les points de division de AF et de GL on mène des plans parallèles aux bases, chacun des 7×3 ⧈ partiels de AA′ sera divisé en 11 parties égales, telles que *Aacdgfeb*; AA′ en contiendra donc $7 \times 3 \times 11$. De même GG′ en contient $4 \times 2 \times 5$, et comme ces parties sont toutes égales, on a (d. 8)

$$(2) \qquad AA' : GG' :: 7 \times 3 \times 11 : 4 \times 2 \times 5.$$

Mais les proportions (1) multipliées par ordre donnent

$$AB \times AC \times AF : GK \times GH \times GL :: 7.3.11 : 4.2.5.$$

Cette proportion ayant un rapport commun avec (2), on en déduit

$$AA' : GG' :: AB \times AC \times AF : GK \times GH \times GL.$$

Si les arêtes correspondantes ne sont pas commensurables entre elles, cette proportion a encore lieu. (*Comparez* l. 4, p. 1.)

PROPOSITION XIII.

Théorème.

Le volume d'un ⧈ rectangle rapporté à un cube est égal au produit des trois arêtes contiguës du ⧈ rapportées au côté du cube.

Soit P un ▱ rectangle, A, B, C ses trois arêtes, p un cube, a son arête. D'après le théorème précédent, on a

$$P : p :: A \times B \times C : a \times a \times a,$$

ou

$$\frac{P}{p} = \frac{A}{a} \times \frac{B}{a} \times \frac{C}{a}.$$

Prenons p pour unité de volume, a pour unité de longueur, $\frac{P}{p}$ sera la mesure de P; $\frac{A}{a}, \frac{B}{a}, \frac{C}{a}$ seront les mesures de ses trois arêtes. Donc, etc.

Remarque 1. Si l'on représente la mesure $\frac{P}{p}$ par P_1, $\frac{A}{a}$ par A_1, $\frac{B}{a}, \frac{C}{a}$, par B_1, C_1, la relation précédente peut s'écrire sous la forme

$$P_1 = A_1 \times B_1 \times C_1,$$

c'est-à-dire que *le volume d'un ▱ rectangle est égal au produit de ses trois arêtes.* Dans cet énoncé, il y a deux unités sous-entendues : l'unité de longueur et l'unité de volume, qui est le cube construit sur l'unité de longueur.

Remarque 2. Le produit de $A_1 \times B_1$ n'est autre chose que l'aire du rectangle qui a pour côtés les arêtes A, B (l. 4, p. 2, r. 1), aire rapportée à la face du cube. Si on regarde ce rectangle comme la base du ▱, l'arête C en sera la hauteur, et l'on peut encore dire que le *volume du ▱ rectangle est égal au produit de sa base* ($A_1 \times B_1$) *par sa hauteur* C_1. Ici il y a trois unités sous-entendues : 1° l'unité de longueur; 2° l'unité de surface qui est le carré construit sur l'unité de longueur; 3° l'unité de volume qui est le cube construit sur cette même unité de longueur. Tous les énoncés analogues au précédent devront être entendus de la même manière dans le reste de cet ouvrage.

Remarque 3. Pour mesurer le volume d'un ▱ rectangle en mètres cubes, il faudra donc mesurer ses trois arêtes en mètres, et faire le produit de ces trois mesures; si les arêtes

sont mesurées en pieds, ce produit sera le volume du ⧈ exprimé en pieds cubes; si les arêtes sont exprimées en décimètres, le volume le sera en décimètres cubes.

Supposons qu'il s'agisse de trouver le volume du ⧈ rectangle dont les arêtes contiguës sont

$$A_1 = 1^m,21 \quad , \quad B_1 = 0^m,32 \quad , \quad C_1 = 0^m,012.$$

On aura $\qquad A_1 \times B_1 = 0,3872,$

puis $\qquad A_1 \times B_1 \times C_1 = 0,3872 \times 0,012$

$$= 0,0046464.$$

Tel est le volume cherché; l'unité est le mètre cube que l'on indiquera par le signe ^{m3}.

Actuellement, remarquons que le mètre se divisant en dix décimètres, le mètre cube, mesuré en décimètres cubes, vaudra 1000. Par conséquent, les millièmes du mètre cube sont des décimètres cubes. De même les millionièmes sont des centimètres cubes, les billionièmes sont de smillimètres cubes. Donc le nombre trouvé ci-dessus vaut 4 décimètres cubes, 646 centimètres cubes, 400 millimètres cubes.

PROPOSITION XIV.

THÉORÈME.

Le volume du prisme est égal à l'aire de la base, multipliée par la hauteur.

1° Soit (fig. 299) un ⧈ quelconque AG; je dis que sans changer ni son volume, ni sa hauteur, ni l'aire de sa base, on peut changer à volonté les $\wedge$ de la base, ainsi que les dièdres adjacents. En effet, prolongez indéfiniment deux arêtes opposées AB, DC, de la base, ainsi que leurs parallèles EF, GH; prenez A'B'=AB; faites sur A'B' un ▱ A'B'C'D', équivalent à ABCD, et ayant d'ailleurs des $\wedge$ quelconques. Par A'D', B'C', menez deux plans parallèles arbitraires A'H', B'G', qui détermineront un ⧈ A'G'; je dis que ce ⧈ est équivalent à AG; car les deux troncs de prismes AHA'H', BGB'G' sont égaux, vu que les droites AB, DC, A'B', D'C', etc.,

qui joignent les sommets de l'un à ceux de l'autre sont égales et parallèles (l. 5, p. 50). Otant la partie commune BGA'H', on a les deux ⊠ AG, A'G', qui sont par suite équivalents. Or, ce qui a été prouvé pour les dièdres AD, BC, peut être appliqué aux dièdres A'B', D'C' qui sont restés invariables. Donc, etc. On peut donc aussi changer les ∧ de la base en des ∧ droits, et les dièdres adjacents en des dièdres droits, c'est-à-dire transformer tout ⊠ en un ⊠ rectangle de même hauteur et de base équivalente; donc tout ⊠ a pour mesure le produit de la hauteur par l'aire de la base.

2° Soit un prisme triangulaire ADEBCF; achevez le ⊠ ABCGFHED, et faites la même construction que ci-dessus, en supposant les plans A'H', B'G' perpendiculaires aux arêtes AB', etc.; prolongez aussi le plan DEFC. Les raisonnements déjà faits (1°) prouvent que les prismes obliques ABCE, DEHG sont respectivement équivalents aux prismes droits A'B'C'E', D'E'H'G'; mais ces derniers sont superposables, comme ayant des bases égales, et les arêtes latérales perpendiculaires à ces bases. Donc les prismes obliques sont équivalents, et chacun d'eux aura pour mesure aire BCF × sa hauteur, moitié de la mesure du ⊠ AG.

3° Enfin tout prisme (fig. 300) se décompose en prismes triangulaires, ayant avec lui la hauteur commune; donc tout prisme a pour mesure l'aire de sa base ABCDE × sa hauteur.

Remarque 1. — Fig. 299. Le prisme triangulaire oblique ABCDFE a même mesure que le prisme droit A'B'C'D'F'E'; *son volume est donc aussi égal à l'aire de sa section droite* A'D'E' × A'B', *ou* × AB, c'est-à-dire × *son arête latérale*. Même résultat pour un prisme quelconque.

Remarque 2. Le même prisme triangulaire ABCDE a aussi pour mesure *l'aire d'une face latérale* ABCD × *la moitié de la distance qui sépare cette face de l'arête opposée;* car cette mesure est la moitié de celle du ⊠ AG.

Corollaire. Deux prismes sont entre eux comme les produits des bases par les hauteurs, etc.

PROPOSITION XV.

THÉORÈME. — FIG. 302.

Si deux pyramides qui ont même hauteur et les bases équivalentes, sur le même plan, sont coupées par un plan parallèle aux bases, les troncs obtenus sont équivalents.

Soient S, T les surfaces des bases; *s*, *t*, celles des sections faites par le plan en question; puisque $S=T$, on a $s=t$ (p. 11). Soit H la hauteur commune des troncs; divisez-la en parties égales infiniment petites, désignées par *h*, et par les points de division menez des plans parallèles aux bases. Les sections faites de part et d'autre par un même plan sont équivalentes, de sorte que $S_1=T_1$, $S_2=T_2$, $S_3=T_3$. Chaque tronc de pyramide donné se trouve par là décomposé en troncs qui (l. 5, d. 33, r.) sont respectivement moindres que Sh ou Th, S_1h ou T_1h, S_2h, S_3h, et plus grands que S_1h, S_2h, S_3h, sh; ainsi chaque tronc total est $<Sh+S_1h+S_2h+S_3h$, et $>S_1h+S_2h+S_3h+sh$. La différence des deux troncs proposés est donc moindre que $Sh-sh$, différence de ces limites; mais $Sh-sh$ est infiniment petit. Donc les troncs proposés sont équivalents.

Corollaire. Rien n'empêche d'étendre ce résultat aux pyramides complètes : il suffit de supposer que les sections *s*, *t* se réduisent aux sommets des pyramides et sont nulles, de sorte que *deux pyramides de même hauteur et de bases équivalentes, sont équivalentes.*

Remarque.—FIG. 303. On peut, sans changer le volume d'un tétraèdre ABCD, transporter un sommet quelconque D parallèlement à une arête AB de la face opposée, en un point E; car si on prend ABC pour base, en transportant le sommet en E, on ne change pas la hauteur (l. 5); et comme on conserve la base ABC, on ne change pas le volume. On peut de même transporter le sommet C parallèlement à la même arête AB.

PROPOSITION XVI.

Théorème. — fig. 304.

Le volume d'une pyramide quelconque est égal au produit de la base par le tiers de la hauteur.

Soit d'abord un tétraèdre EABC; je dis qu'il est le tiers du prisme triangulaire DABCEF, qui a même base et même hauteur; car si, de ce prisme, on ôte le tétraèdre EABC, il reste la pyramide EACFD, qui a pour base le ▱ DACF. Menez le plan EAF, qui décomposera cette pyramide dans les deux tétraèdres EACF, EADF, ayant pour bases les deux Δ égaux ADF, ACF; ces bases sont d'ailleurs sur un même plan; les sommets des deux tétraèdres sont au même point E, de sorte qu'ils ont aussi même hauteur et sont équivalents (p. 15). Mais les tétraèdres ADEF, EABC peuvent être considérés comme ayant pour bases les deux bases du prisme, c'est-à-dire les Δ DEF, ABC, qui sont égaux, et pour hauteur celle du prisme. Ces deux tétraèdres sont donc aussi équivalents. Donc le prisme est la somme de trois tétraèdres équivalents; par conséquent EABC est le tiers du prisme, et a pour mesure le produit de la base par le tiers de la hauteur (p. 14).

Toute pyramide étant (p. 15) équivalente à un tétraèdre de même hauteur et de base équivalente, sa mesure sera la même.

Corollaire 1. Toute pyramide est le tiers du prisme de même hauteur et de base équivalente.

Corollaire 2. Deux pyramides de bases équivalentes sont entre elles comme leurs hauteurs, et deux pyramides de même hauteur sont entre elles comme leurs bases.

Corollaire 3. Deux tétraèdres qui ont un angle trièdre égal sont entre eux comme les produits des arêtes qui comprennent cet angle; car si sur les arêtes de ces angles on construit des ⬚, ces deux corps seront entre eux comme ces produits (p. 12). Or chacun de ces tétraèdres est le

sixième du [prisme] correspondant. Donc les tétraèdres sont aussi entre eux comme ces mêmes produits.

Remarque. Tout polyèdre peut être décomposé en pyramides; par conséquent on saura évaluer le volume d'un polyèdre quelconque, au moyen des mesures de certaines droites.

PROPOSITION XVII.

Théorème. — Fig. 305.

Le tronc de pyramide est égal à la somme de trois pyramides ayant pour hauteur commune celle du tronc, et pour bases, l'une la base inférieure, l'autre la base supérieure, la troisième, une moyenne proportionnelle entre ces deux bases.

Soit ABCDEF un tronc de tétraèdre. Par les trois points A, E, C faites passer un plan qui détachera du tronc le tétraèdre EABC, ayant pour base la base inférieure ABC du tronc, et pour hauteur celle du tronc, puisque le sommet E se trouve sur le plan DEF; c'est le premier tétraèdre demandé. Reste la pyramide quadrangulaire qui a pour sommet le point E, et pour base le trapèze DACF. Par les trois points D, E, C on fera passer un plan qui décomposera cette pyramide dans les deux tétraèdres EDFC, EDAC. Le tétraèdre EDFC peut être considéré comme ayant pour base le triangle EDF, base supérieure du tronc, pour sommet le point C, et par conséquent pour hauteur celle du tronc. C'est le second tétraèdre demandé. Quant au dernier EDAC, transportez le sommet E, parallèlement à l'arête AD, en G sur AB, et ce tétraèdre sera transformé dans le tétraèdre équivalent GDAC, qui peut être considéré comme ayant pour sommet le point D, et pour base AGC; il a donc même hauteur que le tronc, et je dis que sa base AGC est moyenne proportionnelle entre les bases ABC, DEF.

En effet, menez GH parallèle à BC; cette ligne sera aussi parallèle à EF (I. 5); les droites AG, DE sont égales comme parallèles entre parallèles; ainsi les deux Δ AGH, DEF sont égaux. Or, les Δ AGH, AGC ont les bases AH, AC sur une

même droite, le sommet commun en G; ils ont donc même hauteur, et l'on a (l. 4, p. 4, c. 1)

AGH ou DEF : AGC : : AH : AC.

Par une raison semblable, on a

AGC : ABC : : AG : AB.

Mais à cause des parallèles, on a

AH : AC : : AG : AB.

Donc les deux proportions ci-dessus ont un rapport commun et fournissent la proportion nouvelle :

DEF : AGC : : AGC : ABC. Donc AGC, etc.

S'il s'agit d'un tronc de pyramide quelconque, il est prouvé (p. 15) qu'il est équivalent à un tronc de tétraèdre ayant même hauteur, et des bases respectivement équivalentes.

Remarque. Pour calculer l'aire du triangle AGC, remarquez qu'il a même base AC que ABC, et même hauteur que AGH ou DEF.

PROPOSITION XVIII.

THÉORÈME. — FIG. 306.

Le volume d'un tronc de prisme triangulaire ABCDEF *est égal à la somme de trois tétraèdres ayant pour base commune l'une quelconque des deux bases du tronc, et pour sommets les trois sommets de l'autre base.*

Par les trois points E, A, C faites passer un plan qui détachera du tronc le tétraèdre EABC, dont la base est ABC et le sommet le point E. C'est l'un des tétraèdres demandés. Il reste la pyramide quadrangulaire EACFD ; au moyen du plan ECD on la décomposera dans les deux tétraèdres EDFC, EDAC ; dans ce dernier, on peut transporter le sommet E, parallèlement à l'arête AD, en B (p. 15, r.), ce qui transforme ce corps en BDAC, qui peut être considéré comme ayant pour base ABC et pour sommet le point D ; c'est le

second tétraèdre demandé. Quant au troisième tétraèdre EDFC, transportez les sommets D, E, en A, B, parallèlement à FC, ce qui donne le tétraèdre BACF, qui peut être regardé comme ayant pour base le triangle ABC et pour sommet le point F; c'est le troisième des tétraèdres en question.

Remarque 1. Si les arêtes AD, EB, FC sont perpendiculaires au plan ABC, le volume du tronc sera égal à $ABC \times \frac{AD+EB+FC}{3}$.

Remarque 2. Le tronc de prisme triangulaire a aussi pour mesure la section droite multipliée par la moyenne entre les trois arêtes.

Corollaire. Tout tronc de prisme pouvant se décomposer en troncs de prismes triangulaires, on saura calculer le volume d'un tronc de prisme quelconque.

PROPOSITION XIX.

Théorème. — Fig. 307.

Deux polyèdres symétriques sont équivalents.

1° Soient d'abord deux tétraèdres symétriques ayant pour plan de symétrie une face commune ABC. Soient D, D' les sommets; puisque ces deux points sont symétriques par rapport au plan ABC, les hauteurs DE, D'E des deux tétraèdres sont égales; ils ont d'ailleurs même base; donc ils sont équivalents.

2° Soient en second lieu deux polyèdres symétriques quelconques; on pourra les décomposer en un même nombre de tétraèdres symétriques deux à deux. Les deux corps pouvant ainsi être considérés comme composés de parties équivalentes deux à deux, sont équivalents.

PROPOSITION XX.

Théorème.

Le volume du cylindre circulaire est égal au produit de l'aire de sa base par sa hauteur.

A la base du cylindre inscrivez et circonscrivez deux polygones réguliers infinitésimaux semblables et semblablement placés par rapport au centre. Soient S, s, leurs surfaces ; prenez ces polygones pour bases de deux prismes, l'un inscrit, l'autre circonscrit au cylindre; soit h la hauteur commune. La différence des volumes des prismes est $(S-s)h$, quantité infiniment petite, vu que $S-s$ l'est. Donc chacun de ces corps diffère infiniment peu du cylindre. Or, le prisme a pour mesure l'aire de sa base, multipliée par sa hauteur; donc le cylindre a aussi pour mesure l'aire de sa base $\times$ la hauteur.

L'expression du volume du cylindre est donc $\pi r^2 h$, r rayon de la base, h hauteur.

PROPOSITION XXI.

Théorème.

Le volume du cône circulaire est égal au produit de l'aire de la base par le tiers de la hauteur.

On comparera le cône à la pyramide, comme on a comparé le cylindre au prisme, et la mesure du volume du cône sera $\frac{1}{3}\pi r^2 h$, r rayon, h hauteur.

PROPOSITION XXII.

Théorème.

Le volume du tronc de cône est égal à la somme de trois cônes ayant pour hauteur commune celle du tronc, et pour bases, l'un la base inférieure, l'autre la base supérieure, le troisième une moyenne proportionnelle entre les deux bases.

Si au cône entier on inscrit une pyramide à base régulière infinitésimale, le tronc de pyramide, qui aura même hauteur que le tronc de cône, différera infiniment peu de ce dernier, puisque la différence de ces corps est moindre que celle du cône et de la pyramide. Or, le tronc de pyramide se décompose en trois pyramides qui diffèrent infiniment peu des trois cônes indiqués dans l'énoncé ; cela est évident pour les deux premiers. Quant au troisième, soient R et r les rayons des bases du tronc de cône ; B, b les bases du tronc de pyramide : B, b diffèrent infiniment peu de πR^2, πr^2, bases du tronc de cône ; donc Bb diffère infiniment peu de $\pi R^2 \times \pi r^2 = \pi^2 R^2 r^2$; et $\sqrt{Bb}$, moyenne proportionnelle entre B, b, diffère infiniment peu de $\sqrt{\pi^2 R^2 r^2}$ ou $\pi R r$, moyenne proportionnelle entre πR^2 et πr^2. Donc, etc.

Et si h est la hauteur du tronc, son volume sera
$$\frac{1}{3}\pi R^2 h + \frac{1}{3}\pi r^2 h + \frac{1}{3}\pi R r h = \frac{1}{3}\pi h (R^2 + r^2 + Rr).$$

DÉF. 10. *Le secteur* ou *onglet cylindrique, conique, tronc conique*, est la partie du cylindre, du cône, du tronc de cône droits, comprise entre deux plans menés par l'axe, et terminés d'un côté à cet axe. Ce corps se mesure comme le corps entier dont il fait partie : dans le cylindre, c'est le produit de l'aire de la base par la hauteur ; dans le cône, l'aire de la base par le tiers de la hauteur, etc.

DÉF. 11. *Le segment cylindrique, conique, tronc conique*, est la partie détachée par le plan de deux arêtes quelconques. Il se mesure comme le secteur.

PROPOSITION XXIII.

THÉORÈME. — FIG. 308.

Si un Δ ABC *tourne autour d'un axe* AD, *mené par son sommet dans son plan, le volume du corps décrit est égal à la surface que décrit la base* BC, *multipliée par le tiers de la hauteur* AE.

Des points B, C, menez sur l'axe AD les perpendiculaires BB', CC'. La figure tournant autour de AD, les Δ rectangles ABB', ACC' décrivent des cônes droits ; le trapèze BB'C'C engendre un tronc de cône, et l'on a

vol. ABC = *cône* ABB' + *tronc* BB'C'C — *cône* ACC'. (1)

Au tronc de cône décrit par le trapèze BCC'B', circonscrivez un tronc de pyramide régulière à bases infinitésimales ; prenez en même temps ces bases pour bases de deux pyramides ayant leur sommet en A, pyramides circonscrites aux cônes ABB', ACC'. Ces trois polyèdres diffèrent infiniment peu des corps auxquels ils sont circonscrits; donc dans la relation (1) on peut, au lieu de ces derniers corps, considérer les polyèdres; soit *abcd* une face du tronc de pyramide ; A*ab*, A*cd* sont des faces des pyramides, et le volume formé de *pyramide* A*ab* + *tronc abcd*. — *pyramide* A*cd*, peut être considéré comme composé de pyramides telles que A*abcd*, ayant pour sommet commun A, et pour bases les faces latérales *abcd*, etc., du tronc de pyramide. Je dis que AE en est la hauteur. Car *ab*, côté de la base d'une pyramide régulière, est perpendiculaire au rayon B'B, et à l'apothème AB, menés à son milieu B; *ab* est donc aussi (l. 5, p. 2) perpendiculaire au plan ABB', et le plan *abcd*, qui contient *ab*, est de même (l. 5, p. 25) perpendiculaire au plan ABB' ou ABC. Par suite AE, située dans ce dernier, et perpendiculaire à sa trace BC sur *abcd*, sera (l. 5, p. 26) perpendiculaire à *abcd*. Donc AE est la hauteur de la pyramide A*abcd*, et la somme de ces pyramides a pour mesure $\frac{1}{3}$ AE × la somme des bases *abcd* + ... ; par suite, le volume ABC a pour mesure $\frac{1}{3}$ AE × *surface* BC; car *surf.* BC diffère infiniment peu de la surface latérale du tronc de pyramide *abcd*....

Si BC était parallèle à l'axe, le tronc de cône BCC'B' se changerait en un cylindre, et le tronc de pyramide *abcd*..., en un prisme. Si le point C était sur l'axe AD, le cône ACC' et la



pyramide circonscrite n'existeraient pas. Mais dans chacun de ces cas, le raisonnement, ainsi que le résultat, subsiste.

Remarque.— Fig. 309. Soit le Δ ABC, tournant autour de AD; soit AE sa hauteur, F le milieu de BC, FF′ perpendiculaire à AD. On a (p. 6) :

$$\textit{Surf. } BC = BC.2\pi.FF';$$

donc $$\textit{vol. } ABC = \frac{2}{3} AE.BC.\pi FF';$$

mais $$AE \times BC = 2 \textit{ aire } ABC;$$

donc $$\textit{vol. } ABC = \textit{aire } ABC \times \frac{2}{3}.2\pi FF';$$

$$= \textit{aire } ABC \times \frac{2}{3} \textit{circ. } FF';$$

ce qui donne pour l'expression de ce volume, *l'aire du Δ générateur, multipliée par les $\frac{2}{3}$ de la circonférence que décrit le milieu* F *de sa base.*

Tirez AF, prenez $AG = \frac{2}{3}AF$, et menez GG′ perpendiculaire à l'axe, il vient $GG' : FF' :: AG : AF :: 2 : 3$. Ainsi $GG' = \frac{2}{3}FF'$, etc., *circ.* $GG' = \frac{2}{3}$*circ.* FF′;

de là $$\textit{vol. } ABC = \textit{aire } ABC \times \textit{circ. } GG',$$

ce qui fait l'aire du Δ multipliée par la circonférence que décrit le point G pris sur la droite qui joint le sommet au milieu de la base, et aux $\frac{2}{3}$ de cette ligne à partir du sommet.

PROPOSITION XXIV.

Théorème. — Fig. 310.

Si un* Δ ABC *tourne autour d'une droite* DE*, menée comme

on voudra dans son plan, le corps décrit aura pour mesure l'aire de ce Δ, *multipliée par le tiers de la somme des circonférences décrites par les sommets* A, B, C.

Aux troncs de cônes décrits par les trois côtés du Δ ABC, substituez des troncs de pyramides régulières infinitésimales circonscrites, ayant deux à deux les bases communes. Soient aa', bb', cc' des côtés de ces bases, côtés ayant leurs milieux en A, B, C, et étant par conséquent perpendiculaires au plan ABC. Concevez les plans abc, $a'b'c'$, et tous les autres analogues. Le polyèdre déterminé par ces troncs de pyramide, combinés par addition et soustraction comme les troncs de cône qui donnent pour résultat le volume ABC, diffère infiniment peu de ce volume ABC, et peut être considéré comme composé de troncs de prismes triangulaires égaux à $abca'b'c'$; celui-ci a pour section droite ABC, et pour volume $\text{ABC}\,\frac{aa'+bb'+cc'}{3}$; donc le polyèdre total a pour mesure ABC, multiplié par le tiers de la somme des contours des 3 polygones dont aa', bb', cc' sont des côtés ; et le corps décrit par ABC a pour mesure l'aire ABC, multipliée par le tiers de la somme des circonférences décrites par les sommets A, B, C.

Remarque. On peut réduire cette mesure au résultat du théorème précédent, si le point A se trouve sur DE ; de plus, si on joint chaque sommet du Δ au milieu du côté opposé, le point de concours de ces trois droites décrira précisément une circonférence égale au tiers de la somme de celles que décrivent les points A, B, C. (A démontrer.)

DÉF. 12. — FIG. 294. On nomme *secteur sphérique* le corps décrit par un secteur circulaire AOB ou AOI, tournant autour d'un rayon OI, qui ne traverse pas le secteur circulaire. L'arc AB ou AI décrit la zone, *base* du secteur.

DÉF. 13. On appelle *onglet* sphérique le corps compris entre un fuseau sphérique et son dièdre ; le fuseau est appelé *base* de l'onglet.

PROPOSITION XXV.

Théorème.

Le volume { *de la sphère . . . . . . surface* ; *du secteur*, *de l'onglet*, *de la pyramide* } *sphérique* { *est égal à sa* } *base* } *multipliée par le tiers du rayon.*

1° Soit en premier lieu un secteur sphérique décrit (fig. 294) par le secteur circulaire AOB, tournant autour d'un rayon OI. A l'arc AB inscrivez une ligne brisée régulière ACDB, à côtés infiniment petits; circonscrivez une ligne semblable et semblablement placée par rapport à O. Soit OF l'apothème de la première. Tirez les rayons OD′, OC′, passant en D, C. Les deux secteurs polygonaux OA′C′D′B′, OACDB décriront deux corps qui comprennent entre eux le secteur sphérique. Or, chacun des Δ OAC, OCD, décrit un corps qui a pour volume la surface que décrit la base $\times \frac{1}{3}$ OF, et *vol.* OACDB sera égal à *surf. polyg.* ACDB $\times \frac{1}{3}$OF.

De même *vol.* OA′C′D′B′ $=$ *surf.* A′C′D′B′ $\times \frac{1}{3}$OI. Ces deux valeurs diffèrent infiniment peu l'une de l'autre (p. 6); donc il en est de même des volumes, et du secteur sphérique comparé à chacun d'eux.—Donc *secteur sphérique* AOB$=$ *zone* AB$\times \frac{1}{3}$OI. Si h est la hauteur de la zone, r le rayon de la sphère, la surface de la zone est $2\pi rh$, et le volume du secteur $\frac{2}{3}\pi r^2h$.

2° Ce résultat s'étend à la sphère entière, qui a donc pour volume le produit de la surface par le tiers du rayon,

ou $4\pi r^2 \times \frac{1}{3} r = \frac{4}{3} \pi r^3$, ou, d étant le diamètre, $\pi d^2 \times \frac{1}{6} d = \frac{1}{6} \pi d^3$ (p. 7).

3° On démontrera, comme p. 8 pour le fuseau, que l'onglet est au volume de la sphère comme son arc est à la circonférence d'un grand cercle, ou comme le fuseau est à la surface de la sphère. Ainsi :

Onglet : *vol. sphérique* :: *fuseau* : *surf. sphérique;* (1)

ou :: $\frac{1}{3} r \times$ *fuseau* : $\frac{1}{3} r \times$ *surf. sph.*

Mais dans cette proportion les conséquents sont égaux ; donc les antécédents le sont, et *onglet* $= \frac{1}{3} r \times$ *fuseau*.

Si A est l'angle du fuseau, D l'angle droit, on a trouvé (p. 8) *fuseau* $= \frac{\pi r^2 A}{D}$;

donc *onglet* $= \frac{1}{3} \pi r^3 \frac{A}{D}$.

4° On démontrera (fig. 296), comme à pr. 9, que le volume d'une pyramide sphérique triangulaire OABC, rapporté au volume de la pyramide trirectangle, est égal à la somme de ses angles moins deux droits, rapportée à l'angle droit, ou comme le ⌔ ABC est au ⌔ trirectangle. A cet effet, il suffit de remarquer que si l'on prend pour unité de volume la pyramide trirectangle, le volume de la sphère est 8, de même que la surface de la sphère est 8, si on la rapporte au ⌔ trirectangle; par conséquent, d'après la proportion (1), la mesure de l'onglet est alors égale à celle de son fuseau, c'est-à-dire à celle du double de son angle rapporté à l'angle droit. Cela posé, il suffit, dans les raisonnements de pr. 9, de remplacer les ⌔ et fuseaux par les pyramides et onglets, et l'on conclura que *pyramide* OABC$=$A$+$B$+$C$-$2.

Ainsi *pyramide* OABC : *pyramide trirectangle* :: ABC : *triangle trirectangle ;*

ou $$\text{OABC} : \frac{1}{8}.\frac{4}{3}\pi r^3 :: \text{ABC} : \frac{1}{8}.4\pi r^2 ;$$

ou, simplifiant, $$\text{OABC} : \frac{1}{3} r :: \text{ABC} : 1 ;$$

donc $$\text{OABC} = \frac{1}{3} r.\text{ABC}.$$

Le même résultat s'étendra sans peine à une pyramide sphérique polygonale.

Remarque. Tout polyèdre circonscrit à une sphère peut se décomposer en pyramides ayant pour bases les faces du polyèdre, et pour hauteur commune le rayon. Le volume d'un pareil polyèdre est donc égal à sa surface $\times \frac{1}{3}$ du rayon.

PROPOSITION XXVI.

Théorème. — Fig. 311.

Le corps décrit par un segment circulaire ABC tournant autour d'un rayon extérieur DO, a pour mesure le cercle décrit sur la corde AB comme rayon, multiplié par le sixième de la projection de cette corde sur l'axe.

Soit EF cette projection; le secteur sphérique décrit par CAOB a pour mesure $\frac{2}{3}\pi\overline{\text{AO}}^2.\text{EF}$ (p. 25, 1°).

Le volume décrit par le Δ AOB (p. 23) a pour mesure *surf.* AB $\times \frac{1}{3}$ OG, OG étant la hauteur du Δ AOB ; mais

$$surf.\ \text{AB} = 2\pi\text{OG} \times \text{EF} ; \qquad \text{(p. 6)}$$

donc aussi, *vol.* $\text{ABO} = \frac{2}{3}\pi.\text{OG}.\text{OG}.\text{EF} = \frac{2}{3}\pi\overline{\text{OG}}^2.\text{EF}.$

Retranchant du secteur sphérique ce dernier résultat,

on a $\quad vol.\ \text{ABC} = \frac{2}{3}\pi.\text{EF}\ (\overline{\text{AO}}^2 - \overline{\text{OG}}^2).$

D'un autre côté, $\overline{\text{AO}}^2 - \overline{\text{OG}}^2 = \overline{\text{AG}}^2 = \frac{1}{4}\overline{\text{AB}}^2.$

Par suite, $vol.\ \text{ABC} = \frac{2}{3}\pi\,\text{EF} \times \frac{1}{4}\overline{\text{AB}}^2 = \pi\overline{\text{AB}}^2 \times \frac{1}{6}\text{EF}$; *c. q. f. d.*

Déf. 14. — Fig. 311. On appelle *segment de sphère* le corps décrit par un demi-segment circulaire ABEF ou BDE, autour du diamètre qui divise le segment circulaire entier en deux parties égales. La projection de l'arc AB ou BD sur ce diamètre, s'appelle la *hauteur du segment*. — Dans la figure ABEF les droites AF, BE, engendrent les deux *bases* du segment ; dans la figure BED, BE engendre la base unique.

PROPOSITION XXVII.

Théorème. — Fig. 311.

Le volume du segment de sphère à deux bases est égal à la demi-somme des bases multipliée par la hauteur, plus la sphère dont cette hauteur serait le diamètre.

Soit ACBEF le demi-segment circulaire générateur, O le centre du cercle, DO l'axe. Le segment de sphère est composé de deux corps qui sont : celui qui est décrit par le segment circulaire ABC, et le tronc de cône décrit par le trapèze ABEF. — Soit fait $\text{BE}=r$, $\text{AF}=\text{R}$, $\text{EF}=h$;

On a $\quad vol.\ \text{ABC} = \frac{1}{6}\pi\overline{\text{AB}}^2.h, \quad$ (p. 26)

$$Tronc\ \text{ABEF} = \frac{1}{3}\pi h\ (\text{R}^2 + r^2 + \text{R}r),$$

$$\text{ou} = \frac{1}{6}\pi h\ (2\text{R}^2 + 2r^2 + 2\text{R}r).$$

Projetez le point B sur AF en I; il vient

$$\overline{AB}^2 = \overline{BI}^2 + \overline{AI}^2 = h^2 + (R-r)^2.$$

Donc *vol.* ACBEF = *vol.* ABC + *tronc* ABEF =

$$\frac{1}{6}\pi h \left\{ h^2 + (R-r)^2 + 2R^2 + 2r^2 + 2Rr \right\}$$

$$= \frac{1}{6}\pi h \left\{ h^2 + 3R^2 + 3r^2 + 2Rr - 2Rr \right\}$$

$$= \frac{1}{6}\pi h^3 + \frac{1}{2}\pi h (R^2 + r^2).$$

Or, $\frac{1}{2}\pi h(R^2+r^2)$ ou $h.\frac{\pi R^2 + \pi r}{2}$, c'est la hauteur h, multipliée par la demi-somme des bases; $\frac{1}{6}\pi h^3$ est le volume de la sphère décrite sur h comme diamètre; donc, etc.

Corollaire. Si le segment n'a qu'une base, le rayon r est nul, et le volume de ce segment est $\frac{1}{2}\pi R^2 h + \frac{1}{6}\pi h^3$, ce qui fait *la moitié du cylindre de même base et de même hauteur que le segment, plus la sphère dont cette hauteur est le diamètre.*

PROPOSITION XXVIII.

Théorème.

Deux corps circonscrits à la sphère sont entre eux comme leurs surfaces; l'un quelconque de ces corps est à la sphère comme sa surface est à celle de la sphère.

Les corps circonscrits peuvent être ou des polyèdres, ou un cylindre droit, ou un cône droit, ou une combinaison de cônes, de troncs de cônes droits. Le cylindre, les cônes, les troncs de cône, peuvent être remplacés par un prisme, des pyramides, des troncs de pyramides, à faces infiniment petites. Ainsi, chacun de ces corps a pour mesure sa surface multi-

pliée par le tiers du rayon de la sphère ; comme il en est de même de la sphère, tous ces corps sont entre eux comme leurs surfaces.

Corollaire. S'il s'agit du cylindre (fig. 312) décrit par le demi-carré ABCD circonscrit au demi-grand cercle AED, la surface totale de ce corps est égale à $2\pi.AB \times AD + 2\pi\overline{AB}^2 = 4\pi\overline{AB}^2 + 2\pi\overline{AB}^2 = 6\pi\overline{AB}^2$, ce qui fait six grands cercles ; la surface de la sphère étant égale à quatre grands cercles, il s'ensuit que la surface totale du cylindre est à celle de la sphère :: 6 : 4 ou :: 3 : 2. Les volumes sont dans le même rapport.

PROPOSITION XXIX.

Théorème.

Les volumes de deux corps semblables sont comme les cubes des dimensions homologues.

1° Soient (fig. 297) deux pyramides ABCDE, A*bcde* semblables et semblablement placées par rapport au sommet A ; les bases BCDE, *bcde* seront parallèles, et sont par suite entre elles comme les carrés des arêtes homologues AB, A*b*, etc. Ainsi, $BCDE : bcde :: \overline{AB}^2 : \overline{Ab}^2$. Mais les hauteurs, étant homologues, sont comme les mêmes arêtes ; nommant H, *h* ces hauteurs, on a :

$$H : h :: AB : Ab.$$

Multipliant ces proportions, et divisant par ordre les termes du premier rapport par 3, on a :

$$\frac{1}{3} BCDE \times H : \frac{1}{3} bcde \times h :: \overline{AB}^3 : \overline{Ab}^3.$$

Les deux premiers termes sont les volumes des pyramides ; donc ces volumes sont comme les cubes des dimensions homologues.

2° Soient deux polyèdres semblables quelconques P, *p* ; décomposez-les en tétraèdres semblables ; soient T, T′, T″, etc.,

les tétraèdres dont se compose P; t, t', t''.... ceux qui composent p, et qui sont respectivement semblables à T, T', T''... Soit appelée (TT') une arête commune à T et T', etc., on aura, par ce qui vient d'être prouvé :

$$T : t :: (TT')^3 : (tt')^3.$$
$$T' : t' :: (TT')^3 : (tt')^3.$$

De là, $T : t :: T' : t'$, de même $:: T'' : t'' ::$, etc.

Puis $T+T'+T''+\ldots : t+t'+t''+\ldots :: T : t :: (TT')^3 : (tt')^3$. C'est-à-dire, $P : p :: (TT')^3 : (tt')^3$.

3° Le cylindre et le cône sont proportionnels à r^2h, r étant le rayon, h la hauteur. Dans le cas de la similitude, h est proportionnel à r, et par suite r^2h à r^3 ; donc ; etc.

Même résultat pour les troncs de cône.

4° La sphère est proportionnelle au cube du rayon ; ainsi les sphères sont comme les cubes des rayons. Il en est de même des secteurs semblables, des onglets semblables, des pyramides sphériques semblables, des segments semblables.

PROBLÈMES NUMÉRIQUES.

1° *Calculer à* $0^{m3},000001$ *près le volume d'une pyramide sphérique dont la base triangulaire a pour angles* $A=125°$, $B=96°$, $C=85°$; *le rayon est* $0^m,14$.

Le plus petit des trois angles, C, augmenté de 180° donne une somme plus grande que A+B ; d'ailleurs, $A+B+C > 180°$. Le ⌔ est donc possible, et le volume de la pyramide est :

$$V=\frac{1}{6}\pi r^3 \cdot \frac{A+B+C-2D}{D}.$$

$$=\frac{1}{6}\pi(0^m,14)^3 \cdot \frac{126}{90} = \pi.0,002744 \times \frac{7}{30}.$$

$$=\frac{1}{3}\pi.0,0019208.$$

Soient p, $p+\alpha$ deux limites de π : V sera compris entre

$$\frac{0,0019208}{3}(p+) \text{ et } \frac{0,0019208}{3}p$$

La différence de ces valeurs est $\frac{0,0019208}{3}$ qu'on posera $<0,000001$;

d'où $\alpha<\frac{30}{19208}$, et il suffit de prendre $\alpha<\frac{1}{1000}$.

Prenons $p=3,141$ pour π, il vient

$$V=\frac{1}{3}\times 3,141\times 0,0019208=0^{m^3},0020110776,$$

valeur trop petite, mais l'erreur est $<0^{m^3},000001$, et comme l'erreur sur π est moindre que 0,0006, on peut conclure que celle de V est moindre que

$$\frac{1}{3}\times 0,0006\times 0,0019208=0,00000038416.$$

De sorte que $V>0^{m^3},0020110776$, et $<0^{m^3},0020110776+0,00000038416=0,00201146176$.

Ainsi, à moins de $0^{m^3},00000046176$, et *à fortiori* à moins de $0^{m^3},000001$,

$$V=0^{m^3},002011+, \text{ etc.}$$

2° *Trouver, à moins de* i *près, le rayon d'une sphère dont le volume est* a.

Soit r le rayon; on a $\frac{4}{3}\pi r^3=a$, d'où $r^3=\frac{3a}{4\pi}$. (1)

Soient p, $p+\alpha$ deux limites de π; on aura

$$r<\sqrt[3]{\frac{3a}{4p}} \qquad r>\sqrt[3]{\frac{3a}{4(p+\alpha)}}. \qquad (2)$$

Nommons q le quotient $\frac{3a}{4p}$ calculé en plus, β la mesure de l'erreur; on aura

$$\frac{3a}{4p} < q \qquad \text{et} > q - \beta, \tag{3}$$

puis $\qquad r < \sqrt[3]{q}.$

Soit c la racine cubique de q prise à moins de δ, en plus; de sorte que $\quad \sqrt[3]{q} < c$ et $> a - \delta$. (4)

La question est de déterminer c de façon que

$$c - r < i;$$

et en vertu de (4), il suffit pour cela que

$$\sqrt[3]{q} + \delta - r < i;$$

d'où $\qquad \sqrt[3]{q} - r < i - \delta.$ (5)

Comme $\sqrt[3]{q}$ est $> r$, il faut que $\delta < i$. (6)

La relation (5) donne après transposition de r :

$$q < r^3 + 3r^2(i-\delta) + 3r(i-\delta)^2 + (i-\delta)^3, \tag{7}$$

ou $\qquad q - r^3 < 3r^2(i-\delta) + 3r(i-\delta)^2 + (i-\delta)^3.$ (8)

Nous remplacerons q par $\frac{3a}{4p} + \beta$ qui le surpasse, et r^3 par $\frac{3a}{4(p+\alpha)}$ qui est moindre; le premier membre augmente et devient $\beta + \frac{3a}{4p} - \frac{3a}{4(p+\alpha)} = \frac{3a\alpha}{4(p+\alpha)p} + \beta$. Si nous supposons $\alpha < 1$, ce qui est permis, cette expression, après transposition de β, est encore moindre que $\frac{3a\alpha}{4.3.3} = \frac{a\alpha}{12}$, vu que $p+\alpha > p > 3$, et notre inégalité (8) se trouve remplacée par

$$\frac{a\alpha}{12} < 3r^2(i-\delta) + 3r(i-\delta)^2 + (i-\delta)^3 - \beta. \tag{9}$$

Pour satisfaire à celle-ci, on pourra, dans le second membre, remplacer r par un nombre plus petit.

Supposons $a=288$; on aura $r=\sqrt[3]{\frac{3.288}{4\pi}}=\sqrt[3]{\frac{216}{\pi}}>$ $\sqrt[3]{\frac{216}{3,2}}=\sqrt[3]{67,574}$, ce qui >4. On peut donc, dans (9), remplacer r par 4, et comme $\frac{a}{12}=24$, il vient

$$\alpha<\frac{1}{24}[48(i-\delta)+12(i-\delta)^2+(i-\delta)^3-\beta]. \quad (10)$$

Nous savons que δ doit être $<i$, et comme α est >0, on aura aussi une limite pour β. Supposons $i=0,001$, $\delta=0,0001$; il vient

$$\alpha<\frac{1}{24}[0,043209720729-\beta];$$

si l'on prend $\beta=0,001$, il vient $\alpha<0,00179$.

Il suffit donc de prendre pour π le nombre 3,14.

Avec cela on trouve $q\doteq\frac{216}{3,14}=68,790$— etc.

et $\sqrt[3]{q}=4,0971$—etc.;

donc $r<4,0971$ et $r>4,0961$.

La marche qui vient d'être suivie est plus simple que celle qui l'a été pour la question analogue du 4[e] livre; elle est par contre, à quelques égards, moins complète.

3° *Le volume d'une sphère, à 0,001 près en moins, est* $0^m,456$; *avec quel degré d'approximation pourra-t-on calculer le rayon?*

On a $\frac{4}{3}\pi r^3<0^m,457$

et $>0^m,456$;

d'où $r^3<\frac{1,371}{4p}$ et $>\frac{1,368}{4(p+\alpha)}$.

Ces quotients peuvent être calculés avec tel degré d'approximation qu'on veut. Soient β, β' les erreurs ; d'où

$$r^3 < \frac{1,371}{4p} + \beta, \qquad r^3 > \frac{1,368}{4(p+\alpha)} - \beta',$$

et $$r < \sqrt[3]{\frac{1,371}{4p} + \beta}, \qquad r > \sqrt[3]{\frac{1,368}{4(p+\alpha)} - \beta'}.$$

Les racines cubiques peuvent aussi être calculées avec tel degré d'approximation qu'on veut ; soient δ, δ' les erreurs. On aura

$$r < \sqrt[3]{\frac{1,371}{4p} + \beta} + \delta, \qquad r > \sqrt[3]{\frac{1,368}{4(p+\alpha)} - \beta'} - \delta'.$$

La différence de ces limites est la mesure de l'approximation, que je nomme E ; ainsi

$$E = \delta + \delta' + \sqrt[3]{\frac{1,371}{4p} + \beta} + - \sqrt[3]{\frac{1,368}{4(p+\alpha)} - \beta'}.$$

Cette erreur est toujours $> \sqrt[3]{\frac{1,371}{4p}} - \sqrt[3]{\frac{1,368}{4p}}$, p étant approché d'aussi près qu'on veut.

NOTE

SUR LA TRANSFORMATION DES FIGURES.

Une figure étant donnée, si de chaque point de cette figure on déduit un point de l'espace, d'après une loi donnée, le lieu de ces nouveaux points sera une seconde figure que j'appelle en général une *transformée* de la première.

Exemples. 1° Si de tous les points de la première figure on mène dans le même sens des droites égales et parallèles, le lieu de leurs extrémités, c'est-à-dire la transformée, sera une figure égale à la proposée (l. 1 et 5).

2° Si on joint tous les points de la proposée à un même point de l'espace, qu'on prolonge ces droites au delà de ce point de quantités respectivement égales à elles-mêmes, la transformée sera symétrique de la proposée (l. 1 et 5).

3° Après avoir joint tous les points de la proposée à un même point de l'espace, si on prend sur les rayons vecteurs des longueurs qui leur soient proportionnelles, la transformée est semblable à la proposée (l. 3 et 7).

Quel que soit le principe de la transformation, la liaison des deux figures en établit une entre leurs propriétés, de façon que les propriétés de l'une peuvent se déduire de celles de l'autre. C'est ainsi que pour deux figures semblables, les valeurs des longueurs, surfaces, volumes, de l'une se concluent fort simplement de celles de l'autre.

La similitude peut être regardée comme un cas particulier de la relation *de projection*. Deux figures sont dites *projectives* l'une par rapport à l'autre, si on peut les placer de façon qu'à chaque point de l'une il réponde dans l'autre

un point tel que la droite qui joint ces points ou passe par un point donné, nommé *centre*, *pôle* de projection, ou soit parallèle à une direction donnée. Dans le premier cas, la projection est dite *conique*, dans le second, *cylindrique*. L'une des figures étant donnée, on peut assujettir la seconde à des conditions variées, comme d'être située sur une surface donnée. — Il est évident que, ainsi que nous l'avons dit, toute figure semblable et semblablement placée, avec une figure donnée, est une projection de cette même figure. Considérons le cas où la projection doit être située dans un plan donné, nommé *plan de projection*.

I. *La projection d'une droite sur un plan est une droite;* autrement : *Si des points sont en ligne droite, leurs projections sur un plan le sont aussi, sauf un cas d'exception.*

1er cas ; projection conique. — Fig. 313. Soit AB le plan de projection, C le centre de projection, DE une droite : projetez divers points D, F, G, E, de cette droite sur le plan AB, au moyen des droites *projetantes* CD, CF, CG, CE; soient *d*, *f*, *g*, *e*, les traces de ces droites sur AB; ce seront les projections de D, F, G, E. Les droites CD, CF, etc., sont dans le plan CDE ; donc leurs traces *d*, *f*, *g*, *e*, sont sur la trace du plan CDE, c'est-à-dire sur une même droite *de*. Mais ces traces *d*, *f*, *g*, *e* sont les projections de D, F, G, E; donc ces projections sont sur une droite. Il y a exception pour toute projetante ; sa projection se confond avec sa trace sur le plan AB.

2e cas; projection cylindrique. — Fig. 314. AB étant le plan de projection, DE la droite donnée, les projetantes D*d*, F*f*, toutes parallèles à une même droite, sont avec DE dans un plan. Donc leurs traces *d*, *f*, *g*, *e*, sur AB sont en ligne droite. Il y a exception pour toute projetante : elle a pour projection sa trace sur AB.

Le plan qui contient la droite et sa projection se nomme *plan projetant*. La projection *de* de la droite DE se confond avec la trace de son plan projetant DE*de* sur AB (fig. 313 et 314),

II. — Fig. 315. *Si plusieurs droites* AB, AC, AD, etc., *concourent en un point, leurs projections* ab, ac, ad *concourront en un point a, projection de* A.

Car le point A appartenant à chacune des droites, sa projection appartiendra à la projection de chacune.

III. *Les projections coniques de deux ou plusieurs droites parallèles concourent en un point* (sauf un cas d'exception), *leurs projections cylindriques sont parallèles* (sauf un cas d'exception).

1° Soit (fig. 316) AB le plan, C le centre de projection, DD', EE', FF' des droites parallèles entre elles, mais non parallèles au plan de projection. Du point C menez CA parallèlement à ces droites, et soit A sa trace sur le plan AB. Le plan projetant CDD' de la droite DD' contenant le point C de la droite CA parallèle à DD', contiendra cette droite CA; donc sa trace sur AB passe par le point A, c'est-à-dire que la projection de DD' passe par A. De même le plan projetant CEE' de EE' contient CA, et sa trace sur AB passe par A, etc. Donc les projections des droites DD', EE', FF' passent par le point A. L'exception se rapporte au cas où les droites données sont parallèles au plan de projection; dans ce cas, CA l'est aussi, et les traces des plans projetants, c'est-à-dire les projections des droites sont parallèles entre elles et aux droites mêmes.

2° S'il s'agit de projections cylindriques, soit (fig. 317) AB le plan de projection, CC', DD' des droites parallèles entre elles et non parallèles aux projetantes. Projetez des points C, D de ces droites en *c*, *d* sur le plan AB; conduisez les plans projetants C'C*c*, D'D*d*, qui seront parallèles (I. 5). Donc leurs traces *cc'*, *dd'*, sur AB, sont aussi parallèles (I. 5). Mais ces traces sont les projections de nos droites; donc, etc. — Il y a exception, si les droites CC', DD' sont des projetantes; alors leurs projections se réduisent à des points.

Ces relations de position sont des conséquences de la liaison de deux figures projectives, et servent à déduire les

propriétés de l'une de celles de l'autre. Voici une liaison quant aux relations métriques.

IV. Théorème. *Soient* a, b, c, d..., a', b', c', d'... *des segments de droite pris dans une figure; si entre ces segments il existe une relation telle que* a.b.c.d...=a'.b'.c'.d'... *cette même relation aura lieu entre les projections rectilignes de ces segments, pourvu* 1° *qu'à chaque segment* a, b, c, d *du premier membre il réponde dans le second un segment compté sur la même droite, et réciproquement;* 2° *que tout point extrême d'un segment du premier membre serve aussi d'extrémité à un segment du second, et réciproquement;* 3° *que les mêmes conditions soient remplies pour les projections.*

Soit (fig. 318) AB un segment, C le centre de projection, A'B' la projection de AB; CP, CP' des perpendiculaires menées de C sur AB, A'B'. Les Δ ABC, A'B'C', qui ont un angle commun en C, donnent :

$$CAB : CA'B' :: AC.CB : A'C.CB';$$

mais $\quad CAB = \frac{1}{2} AB \times CP, \qquad CA'B' = \frac{1}{2} A'B' \times CP',$

donc $\quad AB \times CP : A'B' \times CP' :: AC.CB : A'C.CB';$

d'où $\quad AB = A'B' . \frac{CP'.AC.CB}{CP.A'C.CB'}.$

Regardant ceci comme la valeur de a, supposons qu'on ait calculé de même celles de $b, c, d.., a', b'...$ et qu'on les substitue dans la relation $abcd = a'b'c'd'...$

On remarquera que 1° puisque dans le second membre il y a un segment compté sur la même droite que AB, le facteur $\frac{1}{CP}$ sera commun aux deux membres; 2° puisque dans le second membre il y a un segment dont la projection est comptée sur la même droite que A'B', le facteur CP' sera commun; 3° puisque les points A, B, A', B' servent aussi

d'extrémités à des segments et projections du second membre, le facteur $\frac{AC.CB}{A'C.CB}$, sera encore commun. Donc à la place de a ou AB il ne restera que sa projection; de même chacun des autres facteurs $b,c,d \ldots\ a',b',\ldots$ sera remplacé par sa projection. Donc la relation donnée aura lieu entre les projections des segments.

Voici maintenant des applications de ces propriétés.

THÉORÈME. (fig. 319). *Dans deux* Δ ABC, A'B'C', *situés dans un plan, et dont l'un est la projection de l'autre, les côtés correspondants se coupent sur une droite* A''B''C''.

Soit D le centre de projection; des points D,A,B,C menez des droites Aa, Bb, Cc, Dd parallèles, de direction quelconque d'ailleurs, mais hors du plan de la figure. Ayant pris sur ces droites quatre points a,b,c,d, qui ne soient pas un plan, regardez-les comme les sommets d'un tétraèdre $dabc$; la figure DABC peut être regardée comme la projection cylindrique de ce tétraèdre; ainsi les points A',B',C', seront les projections de certains points a',b',c' situés sur les arêtes ad, bd, cd; le plan $a'b'c'$ coupera le plan abc en une droite qui contiendra le point d'intersection de ab et $a'b'$: car ces droites, situées sur la face dab, se coupent, et leur intersection fera partie de celle des plans abc, $a'b'c'$ qui contiennent respectivement ces droites ab, $a'b$; cette intersection des plans abc, $a'b'c'$ contiendra aussi celle des droites ac, $a'c'$, ainsi que celle de bc, $b'c'$. Mais le point c'', intersection de ab, $a'b'$, a pour projection C'' intersection de AB,A'B', projections de ab, $a'b'$; de même b'', intersection de ac, $a'c'$, a pour projection B'', et a'', intersection de bc, $b'c'$, a pour projection A''.—A'', B'', C'' sont donc les projections de trois points d'une droite : donc, A'',B'',C'', sont sur une droite.

Remarque. Ce théorème ainsi démontré, on peut en dé-

duire un second théorème analogue, relatif à deux ⌔ situés sur une même sphère, les droites AA′,BB′,CC′, étant remplacées par des arcs de grands cercles; en vertu de ce nouveau théorème la droite A″B″C″ sera aussi remplacée par un arc de grand cercle. On démontrera ceci au moyen de la projection conique, en prenant le centre de projection sur le diamètre intersection des grands cercles AA′,BB′,CC′, etc.

THÉORÈME. *Toute droite* OX (fig. 320) *qui coupe les côtés d'un polygone plan* ABCDE, *détermine sur chacun deux segments, formant deux produits égaux, dont chacun a pour facteurs des segments non consécutifs; de sorte que*

$$AF.BG.CH.DI.EK=FB.CG.DH.EI.AK. \qquad (1)$$

Cette relation satisfait aux conditions énoncées au théorème (IV). Il suffit donc de la démontrer pour des projections satisfaisant aux mêmes conditions. A cet effet, on projettera toute la figure par une droite quelconque *ab*, en prenant pour centre de projection un point quelconque O de la transversale OX, ou en prenant les projetantes parallèles à OX. On a évidemment

$$aX.bX.cX.dX.eX=bX.cX.dX.eX.aX.$$

Relation qui entraîne (1) en vertu du théorème IV.

Remarque. Cette pr. a pour cas particulier la pr. 1, app., l. 3. La pr. 2, ib., peut se démontrer de la même manière : on place le centre de projection au point de concours des trois transversales. Enfin, les pr. 5, 6, app., l. 3, peuvent se ramener à IV.

THÉORÈME (fig. 321). *Tout plan qui coupe les côtés d'un polygone quelconque détermine sur chaque côté deux segments jouissant de la même propriété que ci-dessus.*

Le cas d'un polygone plan rentre dans le théorème précédent. Quant à celui d'un polygone gauche (c'est-à-dire *non plan*) ABCDE, coupé par un plan MN en F, G, H, I, K, on prendra un plan de projection quelconque PQ, rencontrant le plan MN en une droite NR. On projettera sur ce plan PQ

toute la figure donnée, en prenant pour centre de projection un point arbitraire O du plan MN, ou en prenant des projetantes parallèles à ce plan MN. Les points F, G, H, I, K se projetteront sur la trace MN en *f*, *g*, *h*, *i*, *k;* soit *abcde* la projection du polygone donné; en vertu du théorème précédent, on a : *af. bg. ch. di. ek.* = *bf. gc. hd. ie. ka;* donc aussi AF. BG. CH. DI. EK=BF. GC. HD. IE. KA.

Toute courbe tracée sur un cône droit peut être regardée comme ayant pour projection la section droite du cône, c'est-à-dire un cercle.

Parmi ces courbes, remarquez celles qui sont planes, et que l'on distingue en trois genres : 1° l'*ellipse*, courbe fermée, dont le plan, oblique à l'axe, coupe toutes les arêtes sur la même nappe; 2° la *parabole*, dont le plan est parallèle à une seule arête du cône : la courbe est ouverte d'un côté; 3° l'*hyperbole*, dont le plan, parallèle à deux arêtes, coupe les deux nappes du cône; elle est composée de deux branches séparées. — Toutes ces courbes étant des projections planes du cercle, il s'ensuit que la plupart de leurs propriétés pourront se déduire de celles du cercle. C'est ainsi que, sauf de légères modifications, les pr. 10-17, l. 3, app., et leurs corollaires conviennent à ces courbes, que l'on nomme *sections coniques*.

En voici une autre qui a beaucoup d'analogie avec la pr. 27, l. 3, dont elle est en quelque sorte une généralisation.

Théorème. — Fig. 322. *Si chaque côté d'un polygone coupe une section conique en deux points, le produit des segments adjacents aux sommets, et pris dans un même sens à partir des sommets* (AE, AF, BG, BH, etc.), *est égal aux produits des segments déterminés de même, mais en sens contraire, de façon que*

AE. AF. BG. BH. CI. CK. DL. DM =

AM. AL. DK. DI. CH. CG. BF. BE. (1)

Cette relation satisfait aux conditions du théorème de la

page 286 ; il suffit donc de la démontrer pour un cercle, projection de la section conique. Mais si la courbe était un cercle, on aurait (l. 3, p. 27)

$$AE.\,AF = AM.\,AL\,;\ BG.\,BH = BF.\,BE,\ \text{etc.},$$

relations qui rendent identique l'égalité (1). Donc, etc.

Remarque. Cette proposition peut sans peine se généraliser pour un polygone gauche dont chaque côté coupe en deux points la surface d'un cône circulaire (ou d'un cylindre), puisque la projection du cône total sur le plan d'une section circulaire est cette section.

On reconnaît dans les théorèmes précédents l'esprit de la méthode que nous employons : c'est *la transformation projective.*

Dans ces transformations, chaque point de la figure proposée a son conjugué dans la transformée. La loi de ce mode de transformation peut d'ailleurs être variée d'une infinité de manières.

Nous avons fait remarquer (l. 3, app.) un autre genre de transformation, qui consiste à prendre pour transformée la figure déterminée par les polaires de tous les points de la proposée, polaires prises par rapport à un cercle donné ; ce cercle se nomme *cercle directeur*, ligne *directrice.* Les deux figures ont été appelées *polaires réciproques* par rapport à ce cercle. Cette réciprocité consiste en ce que toute droite A de la première figure aura aussi son pôle dans la seconde, et ce pôle sera l'intersection des polaires des points de la droite A. D'après ce qui vient d'être dit plus haut, ces propriétés conviennent aux sections coniques : elles conviennent au cas où la directrice est un angle (l. 3, app.), angle qui d'ailleurs est aussi la section d'un cône par un plan. De là des moyens de solution pour une multitude de questions relatives aux sections coniques.

Nous avons dit (l. 7) qu'on peut appliquer la transformation de polarité à l'espace, en prenant pour directrice une sphère : chaque point de la figure donnée est alors remplacé par son plan polaire relativement à cette sphère, et à chaque

point, à chaque droite, à chaque plan de l'une des figures, répond un plan, une droite, un point dans l'autre. Nous n'étendrons pas plus loin ces indications, pour ne pas empiéter sur la géométrie analytique; faisons observer pourtant qu'on peut, dans cette relation des figures polaires réciproques, supprimer la directrice et lier les deux figures par certaines lois exprimées analytiquement, ce qui donnera à la transformation une extension presque indéfinie.

NOTE II.

SUR LE CALCUL DE π.

On peut établir deux limites qui comprennent r_n, limites exprimées en fonction de deux apothèmes antérieurs.

Nous avons (I. 3)

$$2r_1 = R + r, \qquad 2r_2 = R_1 + r_1, \qquad R_1^2 = Rr_1;$$

de là $\quad R = 2r_1 - r, \qquad R_1 = 2r_2 - r_1.$

Substituant dans la relation $R^2_1 = Rr_1$, on a

$$(2r_2 - r_1)^2 = (2r_1 - r)r_1;$$

d'où $\quad 4r^2_2 - 4r_1r_2 + r_1^2 = 2r_1^2 - rr_1;$

puis
$$r_2 - r_1 = (r_1 - r)\cdot\frac{r_1}{4r_2}. \tag{1}$$

Or, $\frac{r_1}{r_2} = 1 - \frac{r_2 - r_1}{r_2}$, ce qui change la relation (1) en

$$r_2 - r_1 = \frac{r_1 - r}{4} - \frac{(r_1 - r)(r_2 - r_1)}{4r_2}. \tag{2}$$

Il s'ensuit que si l'on considère une série d'apothèmes r_i, r_{i+1}...., on tire de (2)

$$\left.\begin{aligned} r_{i+2} - r_{i+1} &< \frac{r_{i+1} - r_i}{4}, \\ r_{i+3} - r_{i+2} &< \frac{r_{i+2} - r_{i+1}}{4} < \frac{r_{i+1} - r_i}{4^2}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ r_{i+n} - r_{i+n-1} &< \frac{r_{i+1} - r_i}{4_{n-1}}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Ajoutant membre à membre, on a

$$r_{i+u}-r_{i+1}<(r_{i+1}-r_i)\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\ \dots\ +\frac{1}{4^{u-1}}\right).$$

Sommant la progression géométrique, on a

$$r_{i+u}<r_{i+1}+\frac{r_{i+1}-r_i}{3}\left(1-\frac{1}{4^{u-1}}\right); \qquad (4)$$

résultat facile à énoncer, surtout si l'on néglige $\frac{1}{4^{u-1}}$.

Pour avoir une limite inférieure de r_{i+u}, on met (2) sous la forme

$$r_{i+1}-r_i=\frac{r_i-r_{i-1}}{4}-\frac{(r_i-r_{i-1})(r_{i+1}-r_i)}{4r_{i+1}}. \qquad (5)$$

Dans le dernier terme, il n'y a qu'à remplacer les facteurs du numérateur par des valeurs excédantes, r_{i+1} par une valeur déficiente, et on aura une limite dans le sens voulu.

Or, le tableau qu'on trouvera ci-après montre que $r_4-r_3<\frac{16}{10^4}=\frac{4^5}{10^4.4^3}$.

D'ailleurs, (2) ou (5) montre que chaque différence $r_{i+1}-r_i$ est moindre que le quart de la précédente. Donc

$$r_5-r_4<\frac{r_4-r_3}{4}<\frac{4^5}{10^4.4^4},$$

etc.....

$$r_i-r_{i-1}<\frac{4^5}{10^4.4^{i-1}},$$

$$r_{i+1}-r_i<\frac{4^5}{10^4.4^i}.$$

On mettra ces limites à la place des facteurs du numérateur dans le dernier terme de (5), et au dénominateur on peut remplacer r_{i+1} par 0,63, qui est moindre que tous les apothèmes si l'on suppose $i>4$. Il vient

$$r_{i+1}-r_i > \frac{r_i-r_{i-1}}{4}-\frac{1}{4^{2i}}\cdot\frac{4^{10}}{10^8.0,63}. \qquad (6)$$

Le facteur de $\frac{1}{4^{2i}}$ est $<0,017$; je pose $0,017=s$. (7)

Je remplace dans (6) i par $i+1$, $i+2$, etc., et il vient

$$r_{i+2}-r_{i+1} > \frac{r_{i+1}-r_i}{4}-\frac{s}{4^{2i+2}}, \qquad (8)$$

$$r_{i+3}-r_{i+2} > \frac{r_{i+2}-r_{i+1}}{4}-\frac{s}{4^{2i+4}};$$

et d'après (8) $$> \frac{r_{i+2}-r_{i+1}}{4^2}-\frac{s}{4^{2i+3}}-\frac{s}{4^{2i+4}}.$$

La loi est facile à saisir. Pour simplifier les écritures, on fera

$$r_{i+1}-r_i=\mathrm{D}, \qquad \frac{s}{4^{2i+4}}=t. \qquad (9)$$

et l'on a

$$r_{i+2}-r_{i+1} > \frac{\mathrm{D}}{4}-t,$$

$$r_{i+3}-r_{i+2} > \frac{\mathrm{D}}{4^2}-\frac{t}{4}-\frac{t}{4^2} > \frac{\mathrm{D}}{4^2}-\frac{t}{3},$$

$$r_{i+4}-r_{i+3} > \frac{\mathrm{D}}{4^3}-\frac{t}{4^2}-\frac{t}{4^3}-\frac{t}{4^4} > \frac{\mathrm{D}}{4^3}-\frac{t}{3.4},$$

etc.....

$$r_{i+u}-r_{i+u-1} > \frac{\mathrm{D}}{4^{u-1}}-\frac{t}{4^{u-2}}-\frac{t}{4^{u-1}}-\ldots\ldots > \frac{\mathrm{D}}{4^{u-1}}-\frac{t}{3.4^{u-3}}.$$

Sommant à partir de $r_{i+2}-r_{i+1}$, on aura dans le second membre le facteur de D, qui sera, comme plus haut, $\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4^{u-1}}\right)$; en outre, le facteur de $-t$, qui est $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\text{etc.}+\frac{1}{4^{u-3}}\right) < 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{13}{9}$.

Donc, vu (9), on a

$$r_{i+u} > r_{i+1} + \frac{r_{i+1} - r_i}{3}\left(1 - \frac{1}{4^{u+1}}\right) - \frac{0,017.13}{9.4^{2i+2}}. \quad (10)$$

Si toutes les quantités qui entrent dans (4) et (10) pouvaient se calculer rigoureusement, le dernier terme de (10) mesurerait l'approximation. Ce terme

$$= \frac{221}{9000.4^{2i+2}} < \frac{225}{9000.4^{2i+2}} = \frac{1}{10.4^{2i+3}};$$

mais il n'en est pas ainsi : avec les notations du livre 3, on a

$$r_{i+u} < b_{i+1} + e_{i+1} + \frac{b_{i+1} + e_{i+1} - b_i}{3}\left(1 - \frac{1}{4^{u-1}}\right), \quad (11)$$

$$r_{i+u} > b_{i+1} + \frac{b_{i+1} - b_i - e_i}{3}\left(1 - \frac{1}{4^{u-1}}\right) - \frac{1}{10.4^{2i+3}} \cdots (12)$$

Pour mesurer l'erreur, on prendra la différence des seconds membres, et on y ajoutera $3 : 10^s$ (v. page 105), pour tenir compte des erreurs provenant des produits et des quotients par 3, de même que du quotient $\frac{1}{10.4^{2i+3}}$.

On obtient ainsi, pour l'erreur que je nomme z_n,

$$z_n < e_{i+1} + \frac{e_{i+1} + e_i}{3}\left(1 - \frac{1}{4^{u-1}}\right) + \frac{1}{10.4^{2i+3}} + \frac{3}{10^s}. \quad (13)$$

La formule (10), page 105, donne pour e_{i+1}, e_i des limites; nous y remplaçons 4,91 par 5; nous avons ainsi

$$\frac{e_{i+1} + e_i}{3} = \frac{\left(\frac{53}{42}\right)^{i-1} + \left(\frac{53}{42}\right)^{i-2}}{3} = \left(\frac{53}{42}\right)^{i-1}\left\{1 + \frac{42}{53}\right\} : 3 =$$

$$\left(\frac{53}{42}\right)^{i-1} \cdot \frac{95}{159} < \frac{3}{5} \cdot \left(\frac{53}{42}\right)^{i-1}.$$

Rétablissant le facteur $\frac{1}{10^s}$ dans les e, on a

$$z_n<\left[\left(\frac{53}{42}\right)^{i-1}\left\{1+\frac{3}{5}-\frac{1}{3.4^{u-1}}\right\}+3\right]10^{-\delta}+\frac{1}{10.4^{2i+3}}\dots(14)$$

Pour montrer, par un exemple, l'emploi de ces formules, je suppose qu'il s'agisse de calculer π avec 6 décimales; on fera (page 105) $k=6$, d'où $n=13$, $\delta=10$. Ainsi on ira jusqu'à r_{13}, et on conservera 10 décimales. Pour connaître la valeur de i, on posera $z_u<\frac{5}{10^9}$. Car $k+3=9$. Négligeant le terme affecté de u, on aura la condition

$$\left(\frac{53}{42}\right)^{i-1}\cdot\frac{8}{5}:10^{-10}+\frac{3}{10^{10}}+\frac{1}{10.4^{2i+3}}<\frac{5}{10^9},$$

ou $$\left(\frac{53}{42}\right)^{i-1}\cdot\frac{6}{5}+\frac{10^9}{4^{2i+3}}<47.$$

Si l'on avait seulement $\frac{10^9}{4^{2i+3}}<47$, on trouverait que $i=5$ satisfait; ce nombre satisfait à la condition complète, et il suffit de calculer jusqu'à r_6. Voici le tableau des valeurs :

$r=0,5$	$B=0,7071067811$
$b_1=0,6035533905$	$B_1=0,6532814824$
$b_2=0,6284174365$	$B_2=0,6407288619$
$b_3=0,6345731492$	$B_3=0,6376435773$
$b_4=0,6361083632$	$B_4=0,6368755077$
$b_5=0,6364919355$	$B_5=0,6366836927$
$b_6=0,6365878141$	

Actuellement, dans les formules (11), (12), nous ferons $i=5$, $i+u=13$, d'où $u=8$. Mais nous calculerons directement les limites de e_5 et e_6, sans le secours de la formule (10), page 105, et en nous servant des formules de la page 104, savoir $e_4<\frac{e_5+E_5+1}{2}$, $E_4<1+\frac{e_4+E_5.32}{63}$. On trouve ainsi $e_5<4,6$, $e_6<5,8$, en unités du 10e ordre décimal. Les formules (11) et (12) deviennent

$$r_{13} < b_6 + e_6 + \frac{b_6 + e_6 - b_5}{3}\left(1 - \frac{1}{4^7}\right),$$

$$r_{13} > b_6 \quad + \quad \frac{b_6 - b_5 - e_5}{3}\left(1 - \frac{1}{4^7}\right) - \frac{1}{10.4^{13}}.$$

Je prends $b_6 - b_5 = 0{,}0000958786$;

$$e_6 = 6 : 10^{10}, \qquad e_5 = 5 : 10^{10},$$

$$\frac{1}{4^7} = 0{,}0000061035 + \ldots;$$

de là $b_6 + e_6 + \dfrac{b_6 + e_6 - b_5}{3} = 0{,}6366197745 -$, etc.,

$$\frac{b_6 + e_6 - b_5}{3} \cdot \frac{1}{4^7} = 0, \ldots \ldots \ldots 19 +, \text{ etc.},$$

et $\qquad r_{13} < 0{,}6366197726.$

Ensuite $\qquad b_6 - b_5 - e_5 = 0{,}0000958775$;

d'où $\qquad b_6 + \dfrac{b_6 - b_5 - e_5}{3} = 0{,}6366197732$;

retranchant $\quad \dfrac{b_6 - b_5 - e_5}{3} \cdot \dfrac{1}{4^7}$ qui $= 20 : 10^{10} -$ etc.,

et $\quad \dfrac{1}{10.4^{13}}$ qui $= 15 : 10^{10} -$ etc.,

on a $\qquad r_{13} > 0{,}6366197697.$

Nous savons que $\rho - r_{13}$ est $< 5 : 10^9$. Mais nous pouvons calculer cette différence d'une manière plus approchée. En effet, elle est (page 104) moindre que $\dfrac{0{,}21}{4^{13}}$, ce qui est $< \dfrac{29}{10^{10}}$. Ajoutant ceci à la limite supérieure de r_{13}, on a

$$\rho < 0{,}6366197765;$$

d'ailleurs $\rho > 0{,}6366197697$, limite inférieure de r_{13}.

Divisant 2 par chacun de ces nombres, on a

$$\pi < 3{,}14159267,$$
$$\pi > 3{,}14159262.$$

On a donc, et même à moins de $\frac{1}{10^7}$ près, $\pi = 3{,}1415926 + \ldots$

Remarquez que z_u (14) admet un minimum relatif à i, pour un δ donné. Avec le secours des logarithmes népériens, on trouve l'équation du minimum, qui est

$$5{,}4\left(\frac{53}{42}\right)^{i-1}\left(1{,}6 - \frac{1}{3.4^{u-1}}\right) - \frac{10^\delta}{4^{2i}} = 0.$$

Si l'on néglige $\frac{1}{3.4^{u-1}}$, on a

$$(i-1)\,l.\frac{53}{42} + l.\,5{,}4 + l.\,1{,}6 = \delta - 2i.\,l.4.$$

d'où $$i = \frac{\delta - 0{,}93651}{1{,}2969},$$ nombre moindre que δ.

Pour $\delta = 10$, on aurait $i = 7$ environ.

On peut aussi former l'expression complète de la limite de l'erreur commise sur ρ, laquelle limite, au moyen de $R_u - r_u$ (page 102), est

$$\frac{0{,}21}{4^{i+u}} + z_u,$$

et on pourrait chercher le minimum de cette dernière, relativement à i et u. Quoi qu'il en soit, on voit qu'en disposant de i, u et δ, on peut avoir ρ d'une manière aussi approchée qu'on veut, au moyen de (11) et (12).

EXERCICES.

1. Théorème. Étant donnés m points, parmi lesquels il n'y en a pas trois en ligne droite, on pourra former $\frac{(m-1)\ (m-2)\dots\ 3.2.1}{2}$ polygones différents ayant chacun tous ces points pour sommets; parmi tous ces polygones, il n'y en a *jamais* plus d'un qui soit convexe et non étoilé.

2. Th. — Fig. 6. Si deux droites AD, DB rencontrent une droite EC, de manière que les $\wedge$ ADE, CDB, non adjacents, soient égaux, DB sera le prolongement de AD.

3. Th. — Fig. 6. Si quatre droites AD, DB, CD, DE concourent en un point D, de façon que les $\wedge$ non adjacents soient égaux, savoir ADE=CDB, ADC=EDB, il en résulte que DB est le prolongement de AD, et DE le prolongement de CD.

4. Problème. D'un point pris dans un $\wedge$ mener une droite également inclinée sur les côtés de cet $\wedge$.

Construire un quadrilatère, connaissant :

5. Pr. Les quatre côtés et un $\wedge$;

6. Pr. Les quatre côtés et une diagonale;

7. Pr. Trois côtés et les deux diagonales;

8. Pr. Deux côtés adjacents, les deux diagonales et un $\wedge$ non compris entre les deux côtés donnés. Ce problème présente deux cas par rapport à la position de l'$\wedge$ donné;

9. Pr. Deux côtés opposés, les deux diagonales et un $\wedge$;

10. Pr. Un côté et les quatre segments des diagonales.

11. Pr. Décrire un trapèze, connaissant les quatre côtés (sachant quels sont les côtés qui doivent être parallèles).

12. Pr. Étant données deux droites MN, PQ, on prend sur la droite MN un point A, et on demande de trouver sur PQ un point B tel, que si de ce point on mène sur MN une perpendiculaire BC, elle soit égale à CA (le lecteur est prié de faire la figure).

13. Th. Dans un pentagone il ne saurait y avoir plus de trois $\wedge$ qui soient droits.

14. Th. Si du point d'intersection des deux diagonales d'un ▱ on mène deux droites quelconques, les points où elles rencontrent les côtés sont les quatre sommets d'un nouveau ▱.

15. Pr. Par deux points donnés, faire passer un cercle qui ait son centre sur une ligne donnée.

16. Th. Un quadrilatère est inscriptible si les $\wedge$ opposés sont supplémentaires. (Récip. de pr. 13, l. 2.)

17. Th. Si dans un quadrilatère la somme de deux côtés opposés est égale à celle des deux autres, on peut inscrire un cercle dans ce quadrilatère. (Récip. de p. 14, l. 2.)

18. Pr. Par un point pris dans un cercle, mener une corde de longueur

donnée, et déterminer les limites entre lesquelles la longueur donnée doit être comprise pour que le problème soit possible.

19. Th. Si dans un cercle on mène deux cordes à angle droit, et qu'on en joigne les extrémités aux centres, les ∧ opposés au centre seront supplémentaires.

20. Th. — Fig. 78 *bis*. Soient menées du point A deux tangentes au cercle B; menez du point de contact D une perpendiculaire à AE; la partie interceptée entre D et AB sera = BD.

21. Pr. Par un point pris dans un cercle, mener une corde telle que la différence des segments dans lesquels ce point divise la corde, soit égale à une longueur donnée.

22. Pr. Par un point extérieur à un cercle, mener une sécante telle que la partie interceptée dans le cercle soit égale à une longueur donnée.

23. Pr. Mener une tangente commune à 2 cercles donnés.

24. Pr. Deux cercles étant donnés, mener une sécante telle que les parties interceptées dans les cercles soient égales à des longueurs données.

Construire un ▵ *connaissant :*

25. Pr. La base, la hauteur et un ∧ à la base;

26. Pr. La base, la hauteur et l'∧ au sommet;

27. Pr. La base, un ∧ adjacent et la somme des deux autres côtés;

28. Pr. La base, un ∧ adjacent et la différence des deux autres côtés;

29. Pr. La base, l'∧ au sommet, et la somme des deux autres côtés;

30. Pr. La base, l'∧ au sommet, et la différence des deux autres côtés;

31. Pr. La base, l'∧ au sommet et le rayon du cercle inscrit;

32. Pr. Deux côtés et le rayon du cercle circonscrit;

33. Pr. Les ∧ adjacents à la base et la hauteur;

34. Pr. La base et les droites menées des extrémités de cette base aux milieux des côtés opposés.

35. Pr. La base et les perpendiculaires menées des extrémités de cette base sur les côtés opposés;

36. Pr. Deux côtés et la droite qui va de leur point d'intersection au milieu du troisième.

37. Pr. Entre les deux côtés de l'∧ droit d'un ▵ rectangle, placer une droite de longueur donnée qui ait son milieu sur l'hypothénuse.

38. Pr. — Fig. 84. Dans un ▵ ABC, mener une droite DE parallèle à BC, de façon que DE=DB+EC.

39. Pr. Décrire un ▵ rectangle connaissant un côté et sa projection sur l'hypothénuse.

40. Th. Si avec les trois hauteurs d'un ▵ on construit un second ▵, les hauteurs de celui-ci sont proportionnelles aux côtés de celui-là.

Construire un ▵ *connaissant :*

41. Pr. Les trois hauteurs;

42. Pr. Les trois médianes;

43. Pr. Les milieux des trois côtés;

44. Pr. Deux ∧ et la somme des côtés opposés;

45. Le périmètre et deux $\wedge$.

46. PR. Le périmètre, un $\wedge$ et la hauteur menée du sommet de l'un des deux autres $\wedge$.

47. PR. La somme de deux côtés et leurs projections sur le troisième.

Remarque. Dans un $\triangle$ on peut considérer :

Les 3 sommets,
4 centres des cercles tangents aux côtés,
1 centre de cercle circonscrit,
3 milieux des côtés,
3 pieds des hauteurs,
3 pieds des bissectrices,
12 points de contact des cercles tangents,
3 $\wedge$.
3 côtés.
3 hauteurs,
3 bissectrices,
3 médianes,
5 rayons des cercles tangents et du cercle circonscrit,
136 sommes de ces longueurs 2 à 2.
136 différences *id.*
136 produits *id.*
1 périmètre.

448

Total 448 éléments qu'on pourrait multiplier encore.

Sauf quelques cas d'indétermination, et quelques autres qui rentrent les uns dans les autres, le nombre des problèmes auxquels ils donnent lieu est

$$\frac{448.447.446}{1.2.3}$$

ou 14,885,696.

48. PR. Par les sommets d'un $\triangle$ donné, faire passer trois droites formant un nouveau $\triangle$ tel que les sommets du premier soient les pieds des hauteurs du second.

49. PR. Par un des points d'intersection de deux cercles mener une droite dont la longueur totale interceptée dans ces deux cercles, soit égale à une ligne donnée.

50. PR. Par un point donné dans un $\wedge$, mener une droite qui forme avec cet $\wedge$ un $\triangle$ tel que la somme des côtés adjacents à l'$\wedge$ donné soit égale à une ligne donnée.

51. PR. Par un point donné dans un $\wedge$, mener une droite telle que les distances du point donné aux points où cette droite rencontre les côtés de l'$\wedge$ ou leurs prolongements, soient dans un rapport donné.

52. Pr. Étant donnés deux points sur un cercle et une tangente à un troisième point, trouver sur cette tangente un point tel que l'∧ formé par les droites qui joignent ce dernier point aux deux premiers, soit le plus grand possible.

53. Pr. On donne les diagonales d'un quadrilatère inscrit, l'∧ qu'elles comprennent et l'∧ de deux côtés adjacents; construire ce quadrilatère.

54. Pr. Étant donnés deux cercles, en tracer un troisième qui ait un rayon donné et intercepte dans les deux autres des arcs dont les cordes soient respectivement données.

55. Pr. Par deux points donnés, faire passer un cercle qui intercepte dans un cercle donné un arc dont la corde ait une longueur donnée.

56. Pr. Étant donnés les quatre côtés d'un quadrilatère inscrit, le construire.

57. Pr. Avec un côté donné et les deux ∧ adjacents, construire un quadrilatère qui soit inscriptible et circonscriptible.

58. Th. Les droites qui joignent les milieux des côtés opposés d'un quadrilatère se coupent mutuellement en deux parties égales.

Décrire un cercle :

59. Pr. Tangent à deux droites données et ayant son centre sur une droite donnée;

60. Pr. Tangent à deux droites et ayant un rayon donné;

61. Pr. Passant par deux points donnés et tangent à une droite donnée;

62. Pr. Tangent à deux droites et passant en un point donné;

63. Pr. Tangent à une droite, passant en un point et ayant un rayon donné;

64. Pr. Tangent à une droite, passant en un point, ayant son centre sur une droite donnée.

65. Pr. Dans un cercle donné inscrire 3, 4, 5, etc., cercles égaux tangents entre eux et au cercle donné.

66. Pr. Des trois sommets d'un △ donné, pris pour centres, décrire trois cercles tangents deux à deux.

67. Pr. Inscrire un carré dans un △.

68. Pr. Étant donnés deux points sur une circonférence, y déterminer un troisième tel que les cordes qui le joignent aux deux autres soient dans un rapport donné.

69. Pr. Étant donnés deux points A, B hors d'un cercle, déterminer sur la circonférence un point C tel que les points où les droites AC, BC coupent en outre la circonférence, soient sur une parallèle à AB.

70. Th. La somme des perpendiculaires abaissées d'un point intérieur à un △ équilatéral, sur les côtés, est égale à la hauteur.

71. Th. — Fig. 124. Dans tout △ on a

$$\frac{OA'}{AA'}+\frac{OB'}{BB'}+\frac{OC'}{CC'}=1. \text{ Et } \frac{OA}{AA'}+\frac{OB}{BB'}+\frac{OC}{CC'}=2.$$

72. Th. Dans tout △ le centre du cercle circonscrit, l'intersection des mé-

dianes, le centre du cercle mené par les milieux des côtés, l'intersection des hauteurs sont en ligne droite, et placés dans l'ordre où on vient de les nommer; les distances du premier point aux trois autres sont 1:2:3:6; enfin le second et le quatrième sont les centres de similitude des deux cercles désignés.

73. Th. Le cercle mené par les milieux des côtés d'un △ passe par les pieds des hauteurs et par les milieux des portions des hauteurs comprises entre les sommets et le point de concours desdites hauteurs.

74. Pr. Sur trois circonférences concentriques, placer les sommets respectifs d'un △ semblable à △ donné.

75. Pr. D'un point pris sur le plan d'un ▱, mener une droite qui divise l'aire de cette figure en deux parties équivalentes.

76. Pr. D'un point pris sur un côté d'un △, tirer une droite qui divise le △ en deux parties équivalentes.

77. Pr. Trouver dans un △ un point tel que les droites menées de ce point aux trois sommets, divisent le △ en trois parties équivalentes.

78. Pr. D'un point pris dans un △, tirer trois sécantes qui divisent le △ en trois segments équivalents.

79. Th. Si l'on joint les milieux des côtés adjacents d'un quadrilatère, la figure ainsi formée est un ▱ dont l'aire est la moitié de celle du quadrilatère donné.

80. Pr. — Fig. 111. D'un point O pris hors d'un cercle, mener une sécante telle que le rectangle AO×AC soit égal à un carré donné.

81. Pr. D'un point pris dans le plan d'un ∧, tirer une sécante telle que le rectangle des segments soit égal à un carré donné.

82. Pr. Etant donnés une droite et un cercle, trouver sur la droite un point tel qu'en menant de ce point une sécante, le rectangle des deux segments soustractifs terminés à ce point soit égal à un carré donné.

83. Pr. Sur un diamètre AB d'un cercle, trouver un point D tel que si par ce point on mène une corde EDF, faisant avec AB un ∧ donné, le carré de DE soit au rectangle AD×DB dans un rapport donné.

84. Pr. Diviser une droite de longueur donnée en deux segments dont les carrés soient dans un rapport donné.

85. Pr. Construire un carré connaissant la différence entre la diagonale et le côté.

86. Th. Si dans un cercle deux cordes se coupent à ∧ droit, la somme des carrés des quatre segments est égale au carré du diamètre.

87. Pr. Étant donné le rayon d'un cercle, trouver les surfaces des polygones réguliers inscrits et circonscrits de trois et de six côtés.

88. Pr. Étant donné le rayon d'un cercle, trouver la surface du décagone régulier inscrit et celle du décagone régulier circonscrit.

89. Pr. Étant donné le côté d'un polygone régulier, trouver l'apothème et le rayon.

190. Th. Les côtés du pentagone, de l'hexagone et du décagone, réguliers, forment un ▲ rectangle.

191. Th. Si deux droites se coupent, deux plans respectivement perpendiculaires à ces droites se coupent aussi.

192. Th. Sur chacune des quatre faces d'un tétraèdre, déterminez le point situé à l'intersection des médianes; les quatre droites qui, dans le tétraèdre, joignent ces points aux sommets opposés, se coupent en un point situé au quart de la hauteur, par rapport à chaque face prise pour base.

193. Pr. Diviser un tétraèdre en quatre parties équivalentes par des plans partant d'un point intérieur et menés par les six arêtes.

194. Pr. Par une droite située sur une face d'un tétraèdre, mener un plan qui coupe le tétraèdre en deux parties équivalentes.

195. Th. Si trois sphères se coupent deux à deux, il y a deux points communs aux surfaces de ces trois sphères.

196. Th. Étant données trois sphères dont chacune est extérieure aux deux autres, on peut toujours leur mener huit plans tangents communs. (De là on déduit fort simplement les axes de similitude de trois cercles.)

197. Pr. Trouver le volume et la surface des cônes *équilatéraux* inscrit et circonscrit à une sphère.

198. Pr. Trouver l'∧ dièdre d'un polyèdre régulier dont on a la face.

199. Pr. Trouver le rayon de la sphère inscrite et celui de la sphère circonscrite à un polyèdre régulier dont on a la face.

FIN DE LA GÉOMÉTRIE.

ÉLÉMENTS

DE TRIGONOMÉTRIE.



ÉLÉMENTS

DE

TRIGONOMÉTRIE.

LIVRE I.

PRINCIPES DE L'ANALYSE DES FONCTIONS ANGULAIRES.

Déf. 1. Le but de la trigonométrie, considérée de la manière la plus générale, est de faire entrer dans le calcul les angles au moyen de la droite.

Cette partie des mathématiques doit son origine au calcul des triangles. On sait qu'un Δ rectangle est déterminé si l'on en connaît trois éléments, dont au moins l'un est un côté : d'ailleurs, tout Δ pouvant se décomposer en deux Δ rectangles, la résolution des triangles se réduit à celle du Δ rectangle. Or, pour résoudre un Δ rectangle dont on connaît trois éléments, il suffirait d'avoir un autre Δ rectangle semblable au premier, et d'ailleurs tout connu : les angles de ce nouveau Δ seraient les mêmes que ceux du premier ; les côtés seraient proportionnels ; un simple calcul arithmétique

ferait donc connaître tout ce que le Δ proposé renferme d'inconnu. Ainsi, on serait en état de résoudre un Δ quelconque si l'on avait une table contenant les éléments calculés d'une série de Δ rectangles dont les angles aigus présenteraient toutes les valeurs possibles. Pour arriver à cette fin, on a considéré une suite de pareils Δ ayant tous même hypothénuse $OB_1 = OB_2 \ldots$, etc. (fig. 1); et comme il est impossible de donner aux angles aigus toutes les valeurs possibles, on s'est contenté de faire varier l'angle en O par degrés assez petits, pour ne donner lieu qu'à des erreurs négligeables. Ce sera, par exemple, de minute en minute, ou de seconde en seconde, etc.

Outre cette série de Δ on en a calculé une seconde, en prenant un côté de l'angle droit comme côté commun.

De là résulte pour chaque angle un système de lignes $B_1 C_1$, OC_1 ; $B_2 C_2$, OC_2, etc. ; outre le côté OB_1, OB_2, etc. Ces lignes ont reçu des noms particuliers : on va les définir en substituant aux angles des arcs de cercle, et les définitions suivantes ne portent provisoirement que sur les valeurs absolues.

DÉF. 2. — FIG. 2. Le *sinus* d'un arc AC est la perpendiculaire CD abaissée d'une des extrémités C de l'arc sur le rayon OA, qui passe à l'autre extrémité A.

Remarque. Il suit de là que le sinus d'un arc est égal à la moitié de la corde de l'arc double. En effet, prolongez CD jusqu'à la circonférence en C'. Le rayon OA, perpendiculaire à la corde CC', divisera cette corde, ainsi que l'arc sous-tendu CAC', en deux parties égales. Donc l'arc CAC' est le double de l'arc CA, et CD, sinus de CA, est moitié de CC', corde de cet arc double.

Si l'arc AC était de 30°, CAC' serait de 60°; or, la corde de 60° est égale au rayon, donc le sinus de 30° est la moitié du rayon. Nous représenterons le rayon par r : de là

$$\textit{sinus}\ 30^\circ = \frac{1}{2} r, \text{ ou, par abréviation, } \textit{sin.}\ 30^\circ = \frac{1}{2} r.$$

Si l'arc AC était de 45°, CAC' serait de 90°, et CDC' serait le côté du carré inscrit, lequel est $=r\sqrt{2}$; donc

$$sin.\ 45°=\frac{1}{2}r\sqrt{2}.$$

Enfin, si AC était de 60°, l'arc CAC' serait de 120°, ce qui est le tiers de la circonférence ; donc CC', côté du triangle équilatéral inscrit, serait $=r\sqrt{3}$; par suite

$$sin.\ 60°=\frac{1}{2}r\sqrt{3}.$$

DÉF. 3. La *tangente* d'un arc AC est la partie AE de la tangente indéfinie menée à l'une des extrémités de l'arc, et terminée au prolongement du rayon OC, qui passe à l'autre extrémité.

Remarque. Si l'arc AC était de 45°, l'angle EOA serait aussi de 45°, ainsi que son complément OEA ; le Δ OEA serait isocèle, et AE serait=OA. Donc la tangente de 45° est égale à *r*, c'est-à-dire

$$tangente\ 45°=r, \text{ ou } tg.\ 45°=r.$$

DÉF. 4. La *sécante* d'un arc AC est la distance (OE) du centre à l'extrémité de la tangente.

Remarque. Si l'arc AC était de 45°, le Δ rectangle AOE serait isocèle et donnerait

$$\overline{OE}^2=2\overline{OA}^2=2r^2,$$

ou

$$séc.\ 45°=r\sqrt{2}.$$

DÉF. 5. Soit BC le complément de l'arc AC : menons le sinus FC, la tangente BG, la sécante OG de ce complément BC; ces lignes se nomment respectivement le *cosinus*, la *cotangente*, la *cosécante* de AC. Le cosinus d'un arc est donc le sinus du complément de cet arc, etc. ; ainsi

sin. AC=CD, *tg.* AC=AE, *séc.* AC=OE,

cos. AC=FC, *cot.* AC=BG, *coséc.* AC=OG.

Remarque. 1° On a FC=OD : le cosinus mesure donc la distance entre le centre et le pied du sinus.

2° Si l'arc AC était de 45°, son complément BC serait aussi de 45°; le sinus, la tangente, la sécante de ce complément seraient donc respectivement de même grandeur que le sinus, la tangente, la sécante de l'arc AC.

Donc $$cos.\ 45° = sin.\ 45° = \frac{1}{2}r\sqrt{2},$$

$$cot.\ 45° = tg.\ 45° = r,$$

$$coséc.\ 45° = séc.\ 45° = r\sqrt{2}.$$

3° Le sinus, la tangente, la sécante, le cosinus, la cotangente, la cosécante d'un arc, se nomment les *lignes trigonométriques* de cet arc ; les trois premières se nomment les lignes *directes*, les autres sont dites *indirectes*.

Remarque générale. Dans les Δ aucun angle ne surpasse 180°; mais il y a des questions d'analyse qui conduisent à des arcs plus grands que la circonférence même. Or, quelque grand que soit l'arc, les définitions 2, 3, 4, 5, s'y appliquent. Si l'on ne comparait jamais entre eux que des arcs terminés dans le même quadrant, il suffirait de faire entrer dans le calcul les valeurs absolues des lignes trigonométriques. Il n'en est pas ainsi : nous montrerons que, pour considérer à la fois des arcs quelconques, il est nécessaire de donner aux lignes trigonométriques des signes, et pour trouver sur la figure ces signes sans ambiguité, voici les conventions qu'il suffit d'établir :

Fig. 2. 1° Regarder le point A comme la *première extrémité, l'origine* commune des arcs et des tangentes.

2° Compter à partir de ce point, dans un même sens, tous les arcs absolus ou positifs.

3° Regarder comme positifs les sinus qui tombent d'un côté du diamètre AA′ mené par l'origine, et comme négatifs ceux qui tombent de l'autre côté.

4° Regarder comme positifs les cosinus qui tombent d'un côté du diamètre BB′ perpendiculaire à AA′, et comme négatifs les autres.

En comptant les arcs absolus de A vers B, nous regarderons comme positifs les sinus, qui sont, par rapport à AA′, du même côté que le premier quadrant AB; nous regarderons de même comme positifs les cosinus qui, par rapport à BB′, tombent du même côté que AB, et nous prendrons pour origine des cotangentes le point B.

4° Les tangentes seront positives si elles tombent par rapport à AA′ du même côté que AB, et les cotangentes le seront, si elles sont du même côté que AB, par rapport à BB′. Les autres tangentes et cotangentes seront négatives.

6° Les sécantes présentent deux cas : celle de l'arc AC est OE, et contient le point C, fin de l'arc, tandis que celle de l'arc ABH est aussi OE, mais ne contient pas H, fin de l'arc ; nous regarderons comme positives les sécantes et cosécantes qui contiennent la fin de l'arc, et comme négatives les autres.

7° Nous regarderons comme négatifs les arcs comptés de A vers B′.

Toutes ces conventions sont subordonnées à la première ; sans celle-ci les autres seraient vagues et ne produiraient que confusion.

Le but de ces conventions est de rendre applicables à tous les cas les formules démontrées pour tel ou tel cas en particulier. Il nous est impossible de prouver déjà ici que ce but est atteint ; mais nous dirons que toutes les formules de trigonométrie dérivent de deux systèmes de relations : aussitôt que ces deux systèmes seront établis, nous montrerons que le premier est d'accord avec ces conventions, mais ne les nécessite pas, tandis que le second les nécessite impérieusement, et est d'accord avec elles. On reconnaîtra aussi que les symboles négatifs doivent ici, comme en algèbre, être assujettis aux règles connues.

Toutes les fois que nous énoncerons une ligne au moyen des lettres qui la distinguent sur la figure, nous entendrons désigner la valeur absolue de cette ligne. Ainsi OD, AC, désignent les valeurs absolues de ces lignes, les seules qui aient été définies dans les définitions 2 à 5. Il faut donc mo–

difier maintenant ces définitions, et les étendre aux valeurs relatives conformément aux conventions qui viennent d'être posées. Ce sont ces valeurs relatives que nous appelons *fonctions angulaires*.

PROPOSITION I.

Problème. — Fig. 2.

Discuter les signes des lignes trigonométriques pour toutes les valeurs de l'arc.

Supposons que le point C se confonde avec A : l'arc CA deviendra nul ; le sinus CD se réduira aussi à zéro, de même que la tangente AE ; quant à la sécante, elle se confondra avec OA ou r ; le cosinus OD deviendra OA ou r ; la cotangente BG augmente à mesure que le point C se rapproche de A, et on peut prendre le point C assez près de A pour que la cotangente soit plus grande que toute grandeur donnée : cette ligne augmente donc indéfiniment, et n'a point de limite, ce qu'on exprime en disant qu'elle devient *infinie*. La cosécante de l'arc nul est aussi *infinie*. Ainsi

$$\sin 0=0, \operatorname{tg} 0=0, \operatorname{séc} 0=r, \cos 0=r, \cot 0=\infty, \operatorname{coséc} 0=\infty.$$

Si l'arc augmente de 0 à 90°, le sinus, la tangente, la sécante augmentent ; le cosinus, la cotangente, la cosécante diminuent, et dans le premier quadrant ces lignes conservent le signe +. A 45°, ainsi qu'on l'a déjà remarqué, les lignes directes sont respectivement égales aux indirectes. A 90° le sinus est $OB=r$; la tangente, qui a augmenté sans limite, ainsi que la sécante, est infinie ; la cotangente est devenue zéro ; la cosécante s'est confondue avec OB ; en un mot, les lignes directes ont pris les valeurs que prennent les lignes indirectes de l'arc 0 et réciproquement, ce qui doit être, vu que le complément de 90° est 0.

De 90° à 180° le sinus diminue et reste positif : par exemple pour l'arc ABI le sinus est IL. Quant à la tangente, elle n'est plus dirigée sur AE, mais sur son prolongement : sa valeur absolue est AM ; la tangente est négative comme

tombant au-dessous de AA′. La sécante a pour valeur absolue OM; elle ne contient pas la fin I de l'arc; elle aura donc le signe —. Le cosinus de ABI est placé en OL; il tombe à gauche de BB′; il aura le signe —. La cotangente BK aura de même le signe —, et la cosécante OK, contenant la fin de l'arc, aura +.

Donc, dans le second quadrant, le sinus et la cosécante sont positifs; les quatre autres lignes sont négatives. Les lignes directes diminuent de valeur absolue de 90 à 180°, les autres augmentent.

Supposons que le point I vienne en A′ : l'arc sera de 180°; on aura

$$\sin 180^\circ = 0,\ tg\ 180^\circ = 0,\quad séc\ 180^\circ = -r,$$
$$\cos 180^\circ = -r,\ \cot 180^\circ = -\infty,\ coséc\ 180^\circ = +\infty.$$

L'extrémité de l'arc tombant dans le troisième quadrant, en H par exemple, le sinus tombe sur HL; il est négatif comme dirigé au-dessous de AA′; le cosinus sur OL; il est encore négatif; la tangente AE et la cotangente BG sont positives; la sécante tombe sur OE, la cosécante sur OG; elles sont négatives comme ne contenant pas le point H.

De 180 à 270°, les lignes directes augmentent de valeur absolue, les lignes indirectes diminuent de même.

A 270° on aura

$$\sin 270^\circ = -r,\ tg\ 270^\circ = \infty,\ séc\ 270^\circ = -\infty,$$
$$\cos 270^\circ = 0, \cot 270^\circ = 0, coséc\ 270^\circ = -r.$$

Dans le quatrième quadrant en C′, le sinus est — C′D, la tangente = — AM, la sécante = + OM, car elle contient la fin C′. Le cosinus = + OD, la cotangente = — BK, la cosécante = — OK.

De 270° à 360° les lignes directes diminuent de valeur absolue, les autres augmentent de même.

Si le point C′ revient en A, les lignes reprennent les valeurs qu'elles avaient respectivement pour l'arc nul.

Ces résultats ne sont pas bornés aux arcs moindres que 360° : tout arc positif ou négatif qui se termine dans le

premier quadrant AB, présentera les mêmes particularités que les arcs compris entre 0 et 90°; car, quel que soit l'arc, si son origine est A et sa fin C, il a les mêmes lignes trigonométriques que AC, puisque c'est le rayon OA et le point C qui les déterminent (déf. 2—5). De même tout arc terminé dans le second quadrant présentera les particularités relatives aux arcs compris entre 90° et 180°, etc.

On remarquera que, 1° le sinus a le même signe que le cosinus dans les quadrants *impairs;* il est de signe contraire au cosinus dans les quadrants *pairs;*

2° La tangente et la cotangente sont toujours de même signe; elles sont positives dans les quadrants *impairs*, négatives dans les autres;

3° La sécante est toujours de même signe que le cosinus, et la cosécante que le sinus.

4° Le sinus et le cosinus varient entre $+r$ et $-r$; la tangente et la cotangente entre $+\infty$ et $-\infty$; la sécante et la cosécante entre $+r$ et $+\infty$, puis entre $-r$ et $-\infty$. Ces deux dernières ne sont jamais comprises entre $+r$ et $-r$.

5° Enfin toutes les fois qu'une ligne change de signe en passant par l'infini, elle a le double signe lorsqu'elle est infinie. Soit, pour exemple, $tg\ 90°$: si l'on prend un arc compris entre 0 et 90°, sa tangente est > 0; l'arc augmentant jusqu'à 90°, la tangente augmente, reste positive et devient $+\infty$. Mais qu'au lieu de cela on considère un arc compris entre 90 et 180°; sa tangente est < 0; l'arc diminuant jusqu'à 90°, la tangente reste < 0, et augmente indéfiniment en valeur absolue. Donc aussi $tg\ 90° = -\infty$, et par suite $tg\ 90° = \pm\infty$.

De même des autres.

PROPOSITION II.

Théorème.

Si un arc augmente d'un nombre entier de circonférences, aucune de ses lignes trigonométriques ne change.

Car le nouvel arc a les mêmes extrémités que l'ancien (déf. 2-5) : donc k étant un nombre entier quelconque, on a

$$\begin{aligned} \sin(2k.\ 180° + x) &= \sin x, \\ \cos(2k.\ 180° + x) &= \cos x, \text{ etc.} \end{aligned} \qquad (1)$$

PROPOSITION III.

Théorème. — Fig. 2.

Si à un arc on ajoute un nombre impair de demi-circonférences, ses lignes trigonométriques ne changent point quant aux valeurs absolues ; mais toutes, excepté la tangente et la cotangente, changent de signe.

En effet, soit AC un arc : en y ajoutant un nombre impair de demi-circonférences, on obtiendra un second arc, terminé en H, sur le même diamètre que C : ces deux arcs étant ainsi terminés dans des quadrants de même parité, leurs tangentes auront le même signe, ainsi que leurs cotangentes ; leurs sinus seront de signes contraires, de même que les cosinus, sécantes et cosécantes. D'ailleurs la tangente, la cotangente, la sécante et la cosécante auront les mêmes valeurs absolues AE, BG, OE, OG ; les sinus et cosinus formeront de part et d'autre des triangles égaux, et seront respectivement égaux en valeur absolue.

Ces propriétés ont lieu quel que soit l'arc AC ; qu'il soit positif ou négatif, quelle que soit sa grandeur absolue, quelque soit encore le sens dans lequel on compte les demi-circonférences ajoutées. Nommant donc x un arc quelconque, positif ou négatif, k un nombre entier positif ou négatif, on pourra représenter par $(2k+1)\ 180°$ un nombre impair quelconque de demi-circonférences, et l'on aura

$$\left.\begin{aligned} \sin[(2k+1)\ 180°+x] &= -\sin x \\ \cos[(2k+1)\ 180°+x] &= -\cos x \\ \text{tang}[(2k+1)\ 180°+x] &= \text{tg}\, x \\ \cot[(2k+1)\ 180°+x] &= \cot x; \\ \text{etc.} & \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

PROPOSITION IV.

THÉORÈME. — FIG. 2.

Deux arcs égaux et de signes contraires ont des cosinus égaux, mais des sinus égaux et de signes contraires.

En effet, soient deux arcs AC et — AC′ dont les valeurs absolues sont les mêmes. Puisque AC = AC′, la droite CC′ sera perpendiculaire à OA : donc sin AC = CD, sin (—AC′) = — C′D = — CD, et cos AC = OD = cos (—AC′). Cela posé, quelle que soit la longueur de AC, il est évident que les points C, C′ seront toujours de différents côtés du diamètre AA′, et à égales distances de cette droite, hors les cas où ils tombent tous deux sur cette même droite AA′. Donc le cosinus sera toujours commun, et les sinus seront égaux et de signes contraires, excepté le cas où C et C′ tombent sur AA′, alors les sinus seront nuls tous les deux. Ainsi x étant un arc positif quelconque, on a

$$sin\,(-x) = -sin\,x,\quad cos\,(-x) = cos\,x. \qquad (3)$$

Ces formules n'exigent pas que x soit positif : car soit x' un arc absolu, et faisons-y $x = -x'$, elles deviennent

$$sin\,x' = -sin\,(-x'),\quad cos\,x' = cos\,(-x').$$

Or, x' étant absolu, on a $sin(-x') = -sin\,x'$, $cos\,(-x') = cos\,x'$; donc ces formules se réduisent aux identités

$$sin\,x' = sin\,x',\quad cos\,x' = cos\,x'.$$

Il s'ensuit que les formules (3) deviennent identiques si l'on y met pour x un arc négatif : donc elles s'appliquent aussi à ce cas et sont générales.

PROPOSITION V.

THÉORÈME. — FIG. 2.

Pour deux arcs supplémentaires l'un de l'autre,

1° Les sinus sont égaux, de même que les cosécantes ;

2° *Les quatre autres lignes sont respectivement égales et de signes contraires.*

Représentons l'arc AC par x; soit IC parallèle à AA'; l'arc ABI sera le supplément de x. Ainsi ABI$=180-x$. Or, on a

$$\left.\begin{array}{llll} \sin \mathrm{ABI} = & \mathrm{IL} = \mathrm{CD} = & \sin \mathrm{AC}\ldots & \text{ou } \sin(180-x) = \sin x \\ \cos \mathrm{ABI} = & -\mathrm{OL} = -\mathrm{OD} = & -\cos \mathrm{AC}\ldots & \cos(180-x) = -\cos x \\ tg\, \mathrm{ABI} = & -\mathrm{AM} = -\mathrm{AE} = & -tg\, \mathrm{AC}\ldots & tg(180-x) = -tg\, x \\ \cot \mathrm{ABI} = & -\mathrm{BK} = & -\cot \mathrm{AC}\ldots & \cot(180-x) = -\cot x \\ \text{séc}\, \mathrm{ABI} = & -\mathrm{OM} = & -\text{séc}\, \mathrm{AC}\ldots & \text{séc}(180-x) = -\text{séc}\, x \\ \text{et coséc}\, \mathrm{ABI} = & \mathrm{OK} = & \text{coséc}\, \mathrm{AC}\ldots & \text{coséc}(180-x) = \text{coséc}\, x \end{array}\right\} (4)$$

En général, si nous appelons supplément d'un arc x positif ou négatif quelconque, la différence $180-x$, ces formules seront vraies, quel que soit x.

Car soit x' un arc quelconque; posons $x=180+x'$, la première deviendra

$$\sin(-x') = \sin(180+x').$$

Or, il est prouvé que $\sin(-x') = -\sin x'$ (p. 4), et que $\sin(180+x') = -\sin x'$ (p. 3); donc la première formule devient identique si l'on y fait $x=180+x'$. D'un autre côté, x' étant quelconque, $180+x'$ l'est. Donc on peut donner à x des valeurs quelconques. Même raisonnement sur les autres formules (4).

PROPOSITION VI.

PROBLÈME.

Réduire au premier quadrant une ligne trigonométrique quelconque.

On réduit d'abord à la première circonférence.

1° Si l'arc donné est négatif, on le rendra positif en y ajoutant un nombre suffisant de circonférences, ce qui ne change rien à la ligne trigonométrique (p. 4).



EXEMPLES.

$$sin(-1346°) = sin(-1346°+1440°) = sin\ 94°,$$
$$tang(-928°) = tg(-928°+1080°) = tg\ 152°.$$

2° Si l'arc est positif, on en retranchera autant de fois 360° que faire se peut (p. 2).

EXEMPLES.

$$cos\ 864° = cos\ (864°-720°) = cos\ 144°,$$
$$cot\ 1729° = cot\ (1729°-1440°) = cot\ 289°.$$

Cela fait, si l'arc est encore plus grand que 180°, on en retranche 180°, ce qui ne change rien aux tangentes et cotangentes, mais change les signes des autres lignes d'après prop. 3.

Ainsi
$$sin\ 237 = -sin\ 67,$$
$$cos\ 342 = -cos\ 162,$$
$$tg\ 292 = tg\ 112, \text{ etc.}$$

Enfin, si l'arc est encore plus grand que 90°, on passe au supplément, d'après les formules (4) (p. 5).

EXEMPLES.

$$cos\ 162° = -cos\ 18°,$$
$$tg\ 112° = -tg\ 68°.$$

Rien n'empêche de modifier la marche de ces réductions ; rien n'empêche non plus de descendre jusqu'au premier octant (c'est-à-dire au-dessous de 45°).

On trouve de cette manière

$$tg\ 1750° = tg\ 310° = tg\ 130° = -tg\ 50° = -cot\ 40°.$$

Car la tangente 50° est égale à la cotangente du complément qui est 40° ;

$$sin(-820°) = sin\ 260° = -sin\ 80° = -cos\ 10°.$$

PROPOSITION VII.

PROBLÈME. — FIG. 2.

Trouver tous les arcs qui répondent à une ligne trigonométrique donnée, connaissant l'un de ces arcs.

1° Soit donné le sinus d'un arc, c'est-à-dire soit l'équation $\sin x = a$; soit décrit le cercle dans lequel les arcs doivent être considérés, soit pris le point A pour origine et le quadrant AB comme premier quadrant; si a est positif, on portera a sur le rayon OB, de O en F; du point F on mènera une parallèle à AA'; soient I, C les points où elle rencontre la circonférence; tous les arcs, tant positifs que négatifs, qui se terminent en C et I, ont leurs sinus égaux à FO. Or, soit représenté par α l'arc AC, lequel est le plus petit des arcs positifs qui répondent au sinus donné : nommons k un nombre entier quelconque, π la demi-circonférence; tous les arcs positifs ou négatifs terminés en C seront donnés par $x = 2k\pi + \alpha$: car un pareil arc se compose de AC augmenté d'un nombre entier de circonférences, comptées de A vers B, ou de A vers B'.

Quant aux arcs terminés en I, ils se composent de ABI plus un nombre entier de circonférences positives ou négatives; mais ABI=ABA'—A'I$=\pi-\alpha$; donc ces arcs sont donnés par $x = 2k\pi + \pi - \alpha = (2k+1)\pi - \alpha$. Ainsi α étant le plus petit arc qui répond au sinus donné, k un nombre entier quelconque, π la demi-circonférence, l'équation

$$\sin x = a$$

est résolue complétement par

$$x = 2k\pi + \alpha,\quad x = (2k+1)\pi - \alpha.$$

Si le sinus donné est négatif, on en porte la valeur absolue de O en F', on mène HF'C' parallèle à AA', et les arcs terminés en C' et H sont les arcs demandés. Le plus petit arc positif est ici ABA'H qu'on représentera par α, et l'on trouvera pour x les mêmes expressions.

Pour déterminer toutes les valeurs de x, il suffit d'en connaître une; que l'on sache, par exemple, qu'une des valeurs de x est m : cette valeur m sera ou de la forme $2k'\pi+\alpha$, ou $(2k'+1)\pi-\alpha$; k' étant un nombre entier.

Dans le premier cas, les valeurs de x peuvent se transformer ainsi :

la première

$$x=2k\pi+\alpha=2(k-k')\pi+(2k'\pi+\alpha)=2(k-k')\pi+m;$$

la deuxième

$$x=(2k+1)\pi-\alpha=[2(k+k')+1]\pi-(2k'\pi+\alpha)$$
$$=[2(k+k')+1]\pi-m.$$

Ainsi toutes les valeurs de x seront données par ces deux formules, où $k-k'$, $k+k'$ sont des nombres entiers quelconques, et lesquelles peuvent ainsi être mises sous la forme $x=2k''\pi+m$, $x=(2k''+1)\pi-m$.

Dans le second cas, on prendra

$$x=2k\pi+\alpha=(2k+k'+1)\pi-[(2k'+1)\pi-\alpha]$$
$$=(2k+2k'+1)\pi-m$$

et $x=(2k+1)\pi-\alpha=(2k-2k')\pi+[2k'\pi+\pi-\alpha]$
$$=2(k-k')\pi+m,$$

et ces valeurs sont encore de la forme

$$2k''\pi+m,\ (2k''+1)\pi-m.$$

Donc enfin, quel que soit m, pourvu qu'il satisfasse à l'équation $\sin x=a$, toutes les autres valeurs de x sont

$$x=2k\pi+m,\ x=(2k+1)\pi-m.$$

2° On trouvera de même que si l'équation $\cos x=a$ admet la valeur $x=m$, toutes les valeurs de x sont

$$x=2k\pi+m,\ x=2k\pi-m.$$

3° Si l'on a $tg\ x=a$ et $x=m$, on aura en général

$$x=k\pi+m$$

etc.

Remarque. Tous les arcs qui répondent à une ligne tri-

gonométrique donnée, ayant l'origine commune, se terminent à deux points différents. C'est ainsi 1° que les points C et I sont les fins de tous les arcs qui ont pour sinus OF; 2° que les points C, C', sont les fins de tous ceux qui ont pour cosinus OD; 3° que C, H sont celles des arcs qui répondent à la tangente AE; etc.

PROPOSITION VIII.

THÉORÈME. — FIG. 3.

Du sommet d'un angle comme centre, avec un rayon arbitraire, soit décrit un arc de cercle terminé aux côtés de l'angle, et soient menées les lignes trigonométriques de cet arc : l'angle déterminera les rapports de ces lignes avec le rayon, et réciproquement chacun de ces rapports détermine l'angle.

Soient l'angle O, les arcs AB, A'B',... décrits du centre O avec des rayons arbitraires; soient menés les sinus, tangentes, etc., AC, A'C'; BD, etc., de ces arcs; à cause des Δ semblables, on a

$$\frac{AC}{AO}=\frac{A'C'}{A'O}=\text{etc.};\ \frac{OC}{AO}=\frac{OC'}{A'O}=\text{etc.};\ \frac{DB}{OB}=\frac{D'B'}{OB'}=\text{etc.}$$

Donc le rapport du sinus au rayon est déterminé et unique; il en est de même du rapport du cosinus au rayon, etc.

Réciproquement, chacun de ces rapports détermine l'angle; et si l'on ne considère en effet que des ∧ positifs moindres que 360°, chacun de ces rapports, avec son signe, détermine au plus deux valeurs pour l'angle. Car si l'angle O varie de 0 à 360°, le sinus AC de l'arc correspondant ne prendra que deux fois la valeur +AC; par suite, le rapport $\frac{AC}{OA}=\frac{A'C'}{OA'}=$ etc., ne prendra aussi que deux fois la même valeur; de même le cosinus, la tangente, etc. Donc entre 0 et 360° il n'y a que deux ∧ pour lesquels le rapport du sinus au rayon ait une valeur donnée; ce rap-

port détermine donc l'angle. De même des autres. Du reste, en considérant les $\wedge$ entre $-\infty$ et $+\infty$, ces rapports déterminent les $\wedge$ aussi bien que les lignes elles-mêmes déterminent les arcs dans un cercle donné.

Remarque. Il serait donc plus naturel, en tant qu'il s'agit d'angles, de n'introduire dans les formules que les rapports des lignes trigonométriques au rayon ; mais pour établir ces formules par des considérations géométriques, il est presque toujours plus commode de remplacer les $\wedge$ par les arcs, et par suite le rayon s'y rencontre. Cependant il est facile de ramener les choses à l'état où elles seraient si l'on n'avait point introduit cet élément étranger : il suffit pour cela de supposer que le rayon est l'unité à laquelle on rapporte les lignes trigonométriques. Soit par exemple donnée la formule

$$tg\,(a+b)=\frac{r^2\,(tg\,a+tg\,b)}{r^2-tg\,a\,tg\,b}. \qquad (1)$$

Nommons $t'a$, $t'b$, $t'(a+b)$ les rapports de $tg\,a$, $tg\,b$, $tg\,(a+b)$ avec le rayon r, de sorte que

$$\frac{tg\,(a+b)}{r}=t'(a+b),\ \frac{tg\,a}{r}=t'a,\ \frac{tg\,b}{r}=t'b; \qquad (2)$$

puis $tg\,(a+b)=r\,t'(a+b)$, $tg\,a=r\,t'a$, $tg\,b=r.t'b$. (3)

Ces valeurs substituées dans (1) donnent

$$r t'(a+b)=\frac{r^3(t'a+t'b)}{r^2-r^2 t'a\,t'b},$$

ou

$$t'(a+b)=\frac{t'a+t'b}{1-t'a.t'b}, \qquad (4)$$

formule que l'on peut déduire immédiatement de (1), en y faisant $r=1$, et remplaçant les tg par t', ce qui est évident, vu la nature des relations (2) ou (3).

Réciproquement pour repasser de (4) à (1), il suffit de remplacer $t'a$, $t'b$, $t'(a+b)$ par les valeurs (2).

Or, pour ne pas multiplier les notations, on écrit la formule (4) sous la forme $tg\,(a+b)=\frac{tg\,a+tg\,b}{1-tg\,a\;tg\,b}$. (5)

Ainsi on passe de (1) à (5) en posant $r=1$, et on repasse de (5) à (1) en donnant à chaque tangente le dénominateur r, c'est-à-dire en mettant $\frac{tg\,a}{r}$ pour $tg\,a$, $\frac{tg\,b}{r}$ pour $tg\,b$, etc. De même $\frac{\sin a}{r}$ pour $\sin a$, etc. C'est ce qu'on appelle *rétablir le rayon.*

On n'oubliera pas que cette manière d'opérer est une abréviation.

Rien n'empêche d'ailleurs, dès le principe, c'est-à-dire lorsqu'on établit les premières relations trigonométriques, de prendre le rayon pour unité : les notations *sin, cos...* n'y désignent plus que des rapports ; y remplacer *sin*, *cos*, etc., par $\frac{\sin}{r}$ $\frac{\cos}{r}$, etc., ce n'est alors autre chose que les rendre homogènes par rapport aux *sin*, *cos*, etc., r. Car les rapports $\frac{\sin}{r}$ $\frac{\cos}{r}$, etc., par lesquels on remplace *sin*, *cos*..., sont tous du degré zéro, et les formules où on les substitue seront, si l'on ne fait que cette substitution sans autre transformation, aussi du degré zéro.

PROPOSITION IX.

Problème.

Trouver les relations qui lient entre elles les lignes trigonométriques d'un même arc.

Ces relations se réduisent à cinq formules, dont toutes les autres dérivent. En effet (p. 7, r.) une ligne trigonométrique étant donnée, tous les arcs qui y répondent ont une même origine et deux fins différentes; par conséquent

les autres lignes trigonométriques sont déterminées, et chacune d'elles a au plus deux valeurs. Mais si chaque ligne trigonométrique détermine les cinq autres, il faut qu'il y ait entre ces six lignes cinq relations distinctes, et pas davantage.

Fig. 2. Ce même résultat peut s'établir au moyen d'une figure qui fournira ces relations. Soit AC un arc qui n'est point un multiple du quadrant : ses six lignes trigonométriques forment avec le rayon les trois Δ ODC, OAE, OBG, semblables entre eux, et rectangles. Deux Δ semblables fournissent deux proportions distinctes entre leurs côtés ; la comparaison du Δ ODC avec chacun des deux autres donnera donc quatre relations distinctes ; la comparaison de ces deux derniers fournirait encore deux et même trois proportions, mais qui seraient des conséquences des quatre premières. Nommons α, β, γ les trois côtés de l'un des Δ ; α', β', γ' ceux du second ; $\alpha'', \beta'', \gamma''$ ceux du troisième ; les quatre relations en question sont

$$\frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\beta}{\beta'}\,;\quad \frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\gamma}{\gamma'}\,;\quad \frac{\alpha}{\alpha''}=\frac{\beta}{\beta''}\,;\quad \frac{\alpha}{\alpha''}=\frac{\gamma}{\gamma''}.$$

Réciproquement, en vertu de ces quatre relations, supposées vraies, les trois Δ seront semblables, et les autres proportions, que fournissent les côtés, se déduisent de ces quatre égalités.

En outre, les trois Δ sont rectangles : pour traduire cette propriété en équation, il suffit d'ajouter aux quatre relations ci-dessus la formule

$$\alpha^2=\beta^2+\gamma^2.$$

Car celle-ci exprime que l'un des Δ est rectangle ; par suite les deux autres, qui lui sont semblables, le sont aussi, et réciproquement.

Pour avoir les cinq relations, on suivra donc la marche qui vient d'être tracée, ce qui peut se faire de plusieurs manières. Voici celle qui fournit les formules les plus commodes.

Soit $AC=a$.

Le Δ ODC donne

$$\overline{OD}^2+\overline{DC}^2=\overline{OC}^2,\ \text{ou}\ \cos^2 a+\sin^2 a=r^2. \qquad (1)$$

ODC et OAE donnent les deux proportions

$$OD:DC::OA:AE,\quad \text{d'où AE ou}\ tg\,a=\frac{r\sin a}{\cos a}, \qquad (2)$$

$$OD:OA::OC:OE,\quad \text{d'où OE ou}\ séc\,a=\frac{r^2}{\cos a}. \qquad (3)$$

Les Δ ODC, OBG donnent deux proportions :

$$CD:OB::OD:BG,\quad \text{d'où BG ou}\ cot\,a=\frac{r\cos a}{\sin a}, \qquad (4)$$

$$CD:OB::OC:OG,\ \text{d'où OG ou}\ coséc\,a=\frac{r^2}{\sin a}. \qquad (5)$$

Remarque 1. Pour se sendre compte du nombre des manières de déduire de ces triangles 5 formules distinctes, on remarquera que chaque Δ fournit une relation telle que (1), ce qui fait 3; les triangles ODC, OAE fournissent de 3 manières différentes 2 relations; de même ODC, OBG, ce qui fait d'abord 3. 3. $3=3^3$ manières; mais au lieu de comparer ODC avec chacun des deux autres Δ, on peut comparer soit OBG, soit OAE, ce qui donne encore 3. 3^3, total 3^4 manières.

Remarque 2. Ces cinq formules forment le premier des deux systèmes dont il a été question à la remarque générale qui suit la définition 5.—Nous avons donc à prouver que ces formules s'appliquent à tous les arcs, quand même on ferait abstraction des conventions établies à l'endroit cité, mais qu'elles sont d'accord avec ces mêmes conventions. Or, quelque part que l'arc se termine, pourvu que ce ne soit pas à l'extrémité d'un quadrant, les six lignes trigonométriques et le rayon formeront toujours trois Δ rectangles semblables, qui donneront entre leurs côtés les formules (1)–(5). Que si l'extrémité de l'arc tombe sur celle d'un qua-

drant, ces formules seront encore satisfaites ; car nous avons montré (p. 1) que

$$sin\ 0 = 0\ ;\ tg\ 0 = 0\ ,\ séc\ \ 0 = r,$$
$$cos\ 0 = r,\ cot\ 0 = \infty\ ,\ coséc\ 0 = \infty\ ,$$

valeurs qui satisfont aux formules (1)-(5).

On reconnaît de même que les valeurs absolues qui répondent aux arcs de 90°, 180°, 270°, y satisfont. Donc ces formules seraient générales sans le secours des conventions citées.

Pour prouver qu'il y a accord, on remarquera d'abord que la formule (1) ne contenant que les carrés des sinus et cosinus, se trouvera toujours vérifiée, quels que soient les signes de ces sinus et cosinus. Ensuite, dans le premier quadrant, où le sinus et le cosinus sont positifs, les formules (2)-(5) donnent pour les quatre autres lignes des valeurs positives. Dans le second quadrant le sinus est >0, le cosinus <0 ; les formules (2), (3), (4) donneront la tangente, la cotangente, la sécante négatives ; (5) donne la cosécante positive. Dans le troisième quadrant, où sinus et cosinus sont négatifs, les formules (2), (4) donnent les tangentes et cotangentes positives ; (3) et (5) donnent sécante et cosécante négatives. Dans le quatrième quadrant où sinus <0, cosinus >0, la tangente, la cotangente, la cosécante seront négatives en vertu de (2), (4), (5) ; la sécante sera >0 en vertu de (3). Ces résultats sont identiques avec ceux de la proposition 1. Il y a donc accord, et pourvu qu'on sache les signes du sinus et du cosinus (et qu'on observe les règles des signes), les formules (1)-(5) donneront ceux des autres lignes. On peut donc dire aussi que les conventions faites sur les signes du sinus et du cosinus entraînent comme conséquences celles qui sont relatives aux autres signes si l'on admet la généralité des formules (1)-(5).

PROPOSITION X.

PROBLÈME.

Exprimer 5 quelconques des 6 lignes trigonométriques d'un arc en fonction de la sixième supposée donnée.

Il y a deux cas.

1° Si la ligne donnée est le sinus, de la formule (1), p. 9, on tire la valeur du cosinus et on la substitue dans les 4 formules restantes. De même si le cosinus est donné, de (1) on tire le sinus et on le substitue dans les autres formules.

On trouve de cette manière :

$$\cos a = \pm\sqrt{r^2 - \sin^2 a},\quad tg\, a = \frac{r \sin a}{\pm\sqrt{r^2 - \sin^2 a}},$$

$$séc\, a = \frac{r^2}{\pm\sqrt{r^2 - \sin^2 a}},\ \cot a = \frac{\pm r\sqrt{r^2 - \sin^2 a}}{\sin a},\ coséc\, a = \frac{r^2}{\sin a}.$$

2° Si la ligne donnée n'est ni un sinus ni un cosinus, parmi les formules (2)-(5) on choisit celle qui donne la valeur de cette ligne ; on joint cette formule à (1), et on cherche les valeurs du sinus et du cosinus en fonction de la ligne donnée. Ces valeurs trouvées, on les substitue dans celles des formules (1)-(5) qui n'ont pas encore été employées.

Supposons donnée la tangente. On prend les formules (2) et (1) :

$$tg\, a = \frac{r \sin a}{\cos a},\quad \sin^2 a + \cos^2 a = r^2.$$

La première donne $\sin a = \frac{tg\, a . \cos a}{r}$, valeur qu'on substitue dans la seconde, et il vient

$$\frac{tg^2 a . \cos^2 a}{r^2} + \cos^2 a = r^2,$$

d'où $$\cos^2 a\,(tg^2 a + r^2) = r^4\,;$$

puis $$\cos a = \frac{r^2}{\pm\sqrt{r^2 + tg^2 a}}.$$

Substituant ceci dans $\sin a = \dfrac{tg\,a.\cos a}{r}$, on a

$$\sin a = \frac{r\,tg\,a}{\pm\sqrt{r^2 + tg^2 a}}.$$

Dans ces valeurs de $\sin a$ et $\cos a$, le dénominateur doit avoir de part et d'autre le même signe.

Restent les formules (3), (4), (5), qui, substitution faite de ces valeurs du sinus et du cosinus, donnent

(6) $$\text{séc}\,a = \pm\sqrt{r^2 + tg^2 a}, \quad \cot a = \frac{r^2}{tg\,a}, \qquad (7)$$

$$\text{coséc}\,a = \pm\frac{r\sqrt{r^2 + tg^2 a}}{tg\,a}.$$

Remarque 1. Quelques-unes de ces formules se déduisent fort simplement de la figure 2.

1° Le Δ rectangle OAE donne par exemple

$$\overline{OE}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AE}^2 \text{ ou } \text{séc}^2 a = r^2 + tg^2 a,$$

ce qui est la formule (6).

Par le calcul : la formule (2), élevée au carré, donne, si l'on ajoute r^2 de part et d'autre,

$$r^2 + tg^2 a = r^2 + \frac{r^2 \sin^2 a}{\cos^2 a} = r^2\frac{(\cos^2 a + \sin^2 a)}{\cos^2 a}.$$

En vertu de (1), $\cos^2 a + \sin^2 a = r^2$;

donc $r^2 + tg^2 a = \dfrac{r^4}{\cos^2 a} = \left(\dfrac{r^2}{\cos a}\right)^2 = \text{séc}^2 a$ en vertu de (3).

2° Les Δ semblables OAE, OBG donnent

AE : OB :: OA : BG,

ou $tg\,a : r :: r : \cot a$, d'où $\cot a = \dfrac{r^2}{tg\,a}$; c'est (7).

Autrement, on a

$$tg\,a = \frac{r \sin a}{\cos a},\ \cot a = \frac{r \cos a}{\sin a},$$

multipliant, il vient

$$tg\,a \times \cot a = \frac{r \sin a}{\cos a} \times \frac{r \cos a}{\sin a} = r^2,$$

ce qui est la même chose que (7).

Remarque 2. Lorsqu'on s'est donné le sinus, on a vu que plusieurs des autres lignes présentent deux valeurs, et d'abord $\cos a = \pm\sqrt{r^2 - \sin^2 a}$. Ce résultat peut se prouver d'une autre manière. En effet, chercher le cosinus en fonction du carré du sinus, c'est chercher toutes les valeurs du cosinus qui répondent au carré d'un sinus donné (fig. 2). Or, que le sinus donné soit OF ou —OF', il y a deux, et pas plus de deux cosinus correspondants, qui sont +OD et —OL : ils sont égaux et de signes contraires. Il y a de même deux tangentes AE et —AM, ou ±AE, deux cotangentes BG et —BK ; quant aux sécantes, pour le cas du sinus OF, les arcs terminés en C ont pour sécante +OE, et ceux qui sont terminés en I ont pour sécante —OM : les cosécantes sont +OG et +OK.

PROPOSITION XI.

PROBLÈME. — FIG. 4.

Étant donnés les sinus et cosinus de deux arcs, a, b, *trouver les sinus et cosinus de leur somme et de leur différence.*

Les arcs a et b sont supposés positifs, tous les deux plus petits que 45° et l'arc $a > b$.

Soit O le centre, OA le rayon, AB=a, BC=b. Tirez le rayon OB, et menez BD perpendiculaire à OA, CE perpendiculaire à OB. On aura

$$\sin a = \text{BD},\ \cos a = \text{OD},\ \sin b = \text{CE},\ \cos b = \text{OE}.$$

On a aussi ABC$=a+b$. Prolongeant le sinus CE jusqu'à la circonférence en F, on a BF$=$BC ; d'où AF$=$AB—BC$=a-b$. Il s'agit donc de calculer les sinus et cosinus de ABC et de AF : les sinus sont les perpendiculaires CG, FH, abaissées de C, F sur OA, les cosinus sont OG et OH ; ainsi les quatre inconnues sont

$$\sin(a+b)=CG,\ \sin(a-b)=FH,$$
$$\cos(a+b)=OG,\ \cos(a-b)=OH.$$

Pour les déterminer, on remarquera que si du point E, milieu de CF, on mène EI perpendiculaire, et EK parallèle à OA, la première de ces lignes est la demi-somme des bases CG, FH du trapèze CFHG ; de plus, menant aussi FL parallèle à OA, on voit que CL est la différence des mêmes bases, et par suite CK en est la demi-différence. Donc, pour déterminer $\sin(a+b)$ et $\sin(a-b)$, il suffit de calculer EI et CK ; car on aura, ce que d'ailleurs la figure montre,

$$\sin(a+b)=CG=EI+CK,$$
$$\sin(a-b)=FH=EI-CK.$$

De même $\cos(a+b)=OG=OI-GI=OI-EK,$

$$\cos(a-b)=OH=OI+IH=OI+GI=OI+EK.$$

et pour avoir les cosinus, il suffit de calculer leur demi-somme OI, et leur demi-différence EK.

De ces quatre inconnues auxiliaires EI, OI, CK, EK, les deux premières, avec la quantité connue EO$=\cos b$, forment le Δ EOI, semblable à BOD, où les trois côtés sont connus ; les deux autres, avec CE$=\sin b$, forment le Δ CKE, encore semblable à BOD. Car ces deux Δ ont les côtés respectivement perpendiculaires. Donc on trouvera les valeurs de ces inconnues par les proportions

$$\frac{EI}{BD}=\frac{OE}{OB}=\frac{OI}{OD}\ \text{déduites de OEI, OBD,}$$

et $$\frac{CK}{OD}=\frac{CE}{OB}=\frac{EK}{BD}\ \text{déduites de CKE, OBD.}$$

De là

$$EI=\frac{BD.OE}{OB}=\frac{sin\,a.cos\,b}{r},$$

$$OI=\frac{OD.OE}{OB}=\frac{cos\,a.cos\,b}{r},$$

$$CK=\frac{OD.CE}{OB}=\frac{cos\,a.sin\,b}{r}.$$

$$EK=\frac{BD.CE}{OB}=\frac{sin\,a.sin\,b}{r}.$$

La substitution donnera donc

(1) $$sin\,(a+b)=\frac{sin\,a\,cos\,b+sin\,b\,cos\,a}{r},$$

(2) $$sin\,(a-b)=\frac{sin\,a\,cos\,b-sin\,b\,cos\,a}{r},$$

(3) $$cos\,(a+b)=\frac{cos\,a\,cos\,b-sin\,a\,sin\,b}{r},$$

(4) $$cos\,(a-b)=\frac{cos\,a\,cos\,b+sin\,a\,sin\,b}{r}.$$

Ces quatre formules constituent le second des systèmes dont on a parlé à la remarque générale après déf. 5. Nous allons donc prouver qu'en suite des conventions énoncées dans cet article, les formules ci-dessus s'appliquent à tous les arcs. Pour simplifier, nous ferons $r=1$.

1° On a supposé $a>b$; or, il est clair que si l'on avait représenté par b le plus grand des deux arcs, on aurait obtenu des formules qui ne différeraient des précédentes qu'en ce que a serait remplacé par b, et b par a; mais si, dans les formules (1), (3), (4), on fait cette permutation, on reconnaît qu'elles ne changent pas ; donc on aurait retrouvé ces mêmes formules. Quant à (2), elle devient

$$sin\,(b-a)=sin\,b\,cos\,a-sin\,a\,cos\,b.$$

En multipliant celle-ci par -1, et remarquant que $-\sin(b-a)=\sin(a-b)$, on retrouve la formule (2). Donc les 4 formules conviennent au cas où $b>a$. Elles sont encore vraies si $b=a$; la construction relative à $\sin(a+b)$, $\cos(a+b)$ ne subit point de modifications essentielles à ce cas. Quant à (1) et (3), elles donnent $\sin(a-a)=0$, $\cos(a-a)=1$, ce qui est vrai.

D'après ce qui vient d'être dit, on voit que a représente celui des deux arcs que l'on veut; il s'ensuit que tout raisonnement qu'on aura appliqué à l'un des arcs conviendra à l'autre.

2. Je dis que les 4 formules sont encore exactes si on donne à b des valeurs comprises entre 0 et $-45°$. En effet, soit $-b'$ une pareille valeur : si dans (1) et (3) je donne à a une valeur comprise entre 0 et 45°, et à b la valeur b', ces formules sont exactes, vu que b' est entre 0 et $+45°$; mais les résultats sont absolument les mêmes que si dans (2) et (4) on donne à b la valeur $-b'$, comme la substitution le montre; donc (2) et (4) subsistent pour les valeurs de b depuis 0 à -45. En remplaçant dans ce raisonnement (1) et (3) par (2) et (4), et réciproquement, on conclura la même chose pour (1) et (3). Ainsi les quatre formules sont vraies pour toutes les valeurs de a et b, de $+45$ à -45; et, en général, si elles sont vraies pour $b=+m$, quel que soit m, elles le sont aussi pour $b=-m$.

3° Supposons maintenant que les formules soient vraies pour toutes les valeurs de a, depuis une valeur $a'-90°$ jusqu'à $+a'$, quel que soit a', je dis qu'elles le sont encore de $+a'$ à $90+a'$. En effet, si dans (1) on pose $a=90+x$, on a

(6) $\sin(90+x+b)=\sin(90+x).\cos b+\cos(90+x)\sin b.$

Mais $\sin(90+x+b)=\sin(90-x-b)=\cos(x+b).$

De même $\sin(90+x)=\sin(90-x)=\cos x,$

et $\cos(90+x)=-\cos(90-x)=-\sin x.$

Donc (6) se réduit à $sin\,(90+x+b)=$

$$cos\,(x+b)=cos\,x\,cos\,b-sin\,x\,sin\,b.$$

Or, si l'on donne à x une valeur quelconque comprise entre $a'-90°$ et a', cette formule, qui n'est autre chose que (3), est, *par hypothèse*, vraie ; d'un autre côté, donner à x une valeur entre $a'-90$ et a', c'est donner à $90+x$, c'est-à-dire à a, une valeur entre $90+a'-90$ et $90+a'$, c'est-à-dire entre a' et $90+a'$. Donc la formule (1) donne des résultats exacts depuis $a=a'$ jusqu'à $a=90+a'$, si (3) est exacte depuis $a=a'-90$ jusqu'à a'. Résultats analogues pour les trois autres. Nous concluons de là, en effet, que si les quatre formules sont démontrées pour toute valeur de a prise depuis $a'-90$ jusqu'à a', elles le sont par cela même depuis a' jusqu'à $a'+90$, c'est-à-dire que si elles sont vraies quant à l'arc a, pour un intervalle de 90° (de $a'-90$ à a'), on peut étendre de 90° (de a' à $90+a'$) la limite supérieure de cet intervalle, sans qu'elles cessent d'être exactes. Or, elles sont prouvées depuis $-45°$ jusqu'à $+45°$; donc elles le sont depuis $a=45°$ jusqu'à $a=45°+90°$, ensuite jusqu'à $45°+90°+90°$, et ainsi de suite jusqu'à $a=D$. D'ailleurs ce qui est prouvé pour a l'est pour b. Donc elles s'étendent, quant aux deux arcs, depuis $-45°$ jusqu'à $+D$.

4° Enfin il a été prouvé tout à l'heure que si les formules sont vraies pour certaines valeurs positives de a et de b, elles le sont aussi pour les mêmes valeurs prises négativement. Donc enfin leur généralité est absolue.

On peut aussi prouver que la généralité de ces formules nécessite les conventions faites sur les signes. Prenons la formule

$$cos\,(a+b)=cos\,a\,cos\,b-sin\,a\,sin\,b.$$

Faisons-y $b=90°$, ce qui donne $cos\,b=0$, $sin\,b=1$. Soit d'ailleurs $a<180°$, il vient

$$cos\,(a+90°)=-sin\,a.$$

Donc, dans le second et le troisième quadrant, les cosinus doivent être négatifs.

Prenons encore

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a.$$

Soit $a < 180°$ et $b = 180°$, on aura

$$\cos b = -1,\ \sin b = 0,\ \text{et}\ \sin(a+180°) = -\sin a.$$

Par suite, dans le troisième et le quatrième quadrant, les sinus sont nécessairement négatifs.

En résumé donc, les conventions en question sont suffisantes et nécessaires pour que les formules fondamentales de la trigonométrie soient absolument générales.

PROPOSITION XIII.

Problème.

Trouver le sinus et le cosinus d'un multiple quelconque d'un arc a en fonction du sinus et du cosinus de cet arc.

A cet effet, on prend les formules

(1) $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a,$

(2) $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b.$

Pour avoir $\sin 2a$, $\cos 2a$, on y fait $b = a$, ce qui donne

(3) $\sin 2a = \sin a \cos a + \sin a \cos a = 2 \sin a \cos a.$

(4) $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a.$

Pour avoir $\sin 3a$, $\cos 3a$, dans (1) et (2) on fait $b = 2a$; il vient

$$\sin 3a = \sin a \cos 2a + \sin 2a . \cos a,$$
$$\cos 3a = \cos a \cos 2a - \sin a . \sin 2a.$$

Remplaçant $\sin 2a$ et $\cos 2a$ par leurs valeurs (3) et (4), on trouve

$$\sin 3a = \sin a \times (\cos^2 a - \sin^2 a) + \cos a \times 2 \sin a \cos a,$$
$$= \sin a \cos^2 a - \sin^3 a + 2 \sin a \cos^2 a,$$

ou (5) $\sin 3a = 3 \sin a \cos^2 a - \sin^3 a = 3 \sin a (1 - \sin^2 a) - \sin^3 a = 3 \sin a - 4 \sin^3 a.$

De même

$$\cos 3a = \cos a (\cos^2 a - \sin^2 a) - \sin a \times 2 \sin a \cos a,$$
$$= \cos^3 a - \cos a \sin^2 a - 2 \sin^2 a \cos a,$$

ou (6) $\cos 3a = \cos^3 a - 3 \cos a \sin^2 a = \cos^3 a - 3 \cos a \times (1 - \cos^2 a) = 4 \cos^3 a - 3 \cos a.$

On peut pousser ces opérations aussi loin qu'on voudra. Pour avoir des formules générales, on aura recours aux imaginaires. On multiplie entre eux les deux facteurs

$$\cos a + \sqrt{-1}.\sin a$$
$$\cos b + \sqrt{-1}.\sin b$$

$$\cos a \cos b + \sqrt{-1}.\sin a \cos b + \sqrt{-1}.\sin b \cos a - \sin a \sin b$$

ou $\cos a . \cos b - \sin a \sin b + \sqrt{-1} (\sin a \cos b + \sin b \cos a).$

Ici la partie réelle est égale à $\cos (a+b)$, et le coefficient de $\sqrt{-1}$ est $\sin (a+b)$.

Donc

(7) $$(\cos a + \sqrt{-1}.\sin a)(\cos b + \sqrt{-1}.\sin b) = \cos (a+b) + \sqrt{-1}.\sin (a+b).$$

Changeant a en $a+b$, et b en c, on aura

$$[\cos (a+b) + \sqrt{-1}.\sin (a+b)][\cos c + \sqrt{-1}.\sin c] = \cos (a+b+c) + \sqrt{-1}.\sin (a+b+c),$$

ou, vu l'égalité (7),

$$(\cos a + \sqrt{-1}.\sin a)(\cos b + \sqrt{-1}.\sin b)(\cos c + \sqrt{-1}.\sin c) = \cos (a+b+c) + \sqrt{-1}.\sin (a+b+c).$$

En général, si l'on suppose cette propriété vraie pour n

facteurs de cette forme, on prouvera facilement qu'elle est aussi vraie pour $n+1$ facteurs. On peut donc poser en général

$$(\cos a_1+\sqrt{-1}.\sin a_1)(\cos a_2+\sqrt{-1}.\sin a_2)\ldots\ldots$$
$$(\cos a_n+\sqrt{-1}.\sin a_n)=\cos(a_1+a_2+\ldots\ldots+a_n)+$$
$$\sqrt{-1}.\sin(a_1+a_2+\ldots\ldots+a_n).$$

Faisant ici $a_1=a_2=\ldots=a_n=a$, on a

$(\cos a+\sqrt{-1}.\sin a)^n=\cos na+\sqrt{-1}.\sin na$ (formule de MOIVRE), ou en développant le premier membre d'après le binôme de Newton,

$$\cos na+\sqrt{-1}.\sin na=$$
$$\cos^n a+n\sqrt{-1}.\cos^{n-1}a.\sin a-\frac{n(n-1)}{1.2}.\cos^{n-2}a.\sin^2 a-$$
$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\sqrt{-1}.\cos^{n-3}a.\sin^3 a+\ldots$$
$$=\cos^n a-\frac{n(n-1)}{1.2}.\cos^{n-2}a.\sin^2 a+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}\cos^{n-4}a\times$$
$$\sin^4 a-\text{etc.}$$
$$+\sqrt{-1}\left\{n\cos^{n-1}a.\sin a-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\cos^{n-3}a\sin^3 a+\ldots\ldots\right\}$$

Égalant les parties réelles, puis les parties imaginaires, on a

$$(8)\ \cos na=\cos^n a-\frac{n(n-1)}{1.2}.\cos^{n-2}a.\sin^2 a+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}\times$$
$$\cos^{n-4}a\sin^4 a-\text{etc.}$$

$$(9)\ \sin na=n\cos^{n-1}a.\sin a-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\cos^{n-3}a\sin^3 a+\ldots.$$

Ce sont les formules demandées : si l'on y fait successivement $n=2,3$, on retrouve les formules (3), (4), (5), (6).

Remarque 1. — FIG. 5. Les formules (3), (4), (5), (6)

peuvent se démontrer géométriquement. Pour les formules (3) et (4), soit AB l'arc a, ABC l'arc $2a$; menez la corde AC, le rayon OB, et le sinus CF; cette figure, qui n'est que la fig. 4 modifiée, donne

$$AD = DC = \sin a, \quad OD = \cos a,$$
$$CF = \sin 2a, \quad OF = \cos 2a.$$

Les Δ semblables OAD, AFC donnent

$$CF : CA :: OD : OA,$$

d'où $CF = \frac{CA.OD}{OA}$ ou $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$;

car $OA = r = 1$.

Voilà la formule (3).

Ensuite, du point D menez DE perpendiculaire à OA; il vient

$$OF = OE - EF = OE - EA.$$

Mais le Δ rectangle ODA donne

$$\overline{OD}^2 = OA.OE, \quad \overline{AD}^2 = OA.AE,$$

d'où $OE = \frac{\overline{OD}^2}{OA} = \cos^2 a$, $EA = \frac{\overline{AD}^2}{OA} = \sin^2 a$

et OF ou $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$.

C'est (4).

Fig. 6. Pour avoir (5) et (6), soit $AB = a$; prenons $BC = CD = a$, de sorte que $ABD = 3a$.

Soient tirés les rayons OA, OB, OD, la corde BD, et les sinus BF, DE, de sorte que

$$BF = \sin a, \quad OF = \cos a,$$
$$DE = \sin 3a = DG + GE, \quad OE = \cos 3a.$$

Il y a donc à calculer les lignes DG, GE, OE.

Or, les Δ DGB, ODB ont un angle commun en B; prolongeant DE jusqu'à la circonférence en H, on a l'arc AH=

AD=$3a$; par suite, l'arc BAH=$4a$; ainsi l'angle inscrit BDH, qui intercepte cet arc, a pour mesure $2a$; l'angle au centre DOB a aussi pour mesure $2a$=DCB; ces deux angles sont donc égaux et les Δ DOB, DBG sont semblables. Mais DOB est isocèle; donc DGB l'est aussi et DG=DB=2BF=$2\sin a$.

De plus, on aura

$$BG : BD :: BD : BO,$$

d'où
$$BG=\frac{\overline{BD}^2}{BO}=4\sin^2 a \quad (BO=r=1).$$

De là
$$OG=OB-BG=1-4\sin^2 a.$$

Ensuite
$$GE : BF :: OE : OF :: OG : OB,$$

d'où
$$GE=\frac{BF.OG}{OB}, \quad \text{et } OE=\frac{OF.OG}{OB},$$

c'est-à-dire $GE=\sin a(1-4\sin^2 a), OE=\cos a(1-4\sin^2 a)$.

De là
$$\sin 3a = 2\sin a+\sin a-4\sin^3 a,$$
$$=3\sin a-4\sin^3 a,$$
$$\cos 3a=\cos a-4\sin^2 a\cos a=$$
$$=\cos a-4\cos a(1-\cos^2 a)=4\cos^3 a-3\cos a.$$

Ces démonstrations géométriques sont loin d'avoir la généralité des démonstrations analytiques qui les précèdent.

Remarque 2. *Cos na* peut toujours s'exprimer en fonction rationnelle de *cos a*; mais *sin na* ne peut s'exprimer en fonction rationnelle de *sin a*, que si n est impair : c'est ce que prouvent les formules (8) et (9). Car la formule (8) ne contient que les puissances paires de *sin a* : on peut donc y remplacer $\sin^2 a$, $\sin^4 a$..... par $1-\cos^2 a$, $(1-\cos^2 a)^2$, etc., ce qui n'introduit point de radicaux. Quant à la formule(9), elle renferme

$$\cos^{n-1} a, \ \cos^{n-3} a, \ \cos^{n-5} a, \ \text{etc...};$$

or, si n est pair, les exposants seront impairs, *sin na* renfer-

mera le facteur $\cos a = \sqrt{1 - \sin^2 a}$, multiplié par un facteur qui ne renferme $\cos a$ qu'à des puissances paires, lesquelles sont des puissances entières de $1 - \sin^2 a$; par conséquent $\sin na$ sera une fonction irrationnelle de $\sin a$, et aura deux valeurs pour chaque valeur de $\sin a$. Si au contraire n est impair, les exposants $n-1$, $n-3$,... sont pairs, et $\cos^{n-1} a$, $\cos^{n-3} a$,... seront des fonctions rationnelles de $\sin a$, de même que $\sin na$, qui par suite n'aura qu'une seule valeur.

Ces résultats peuvent s'établir d'une autre manière. En effet, 1° chercher $\cos na$ en fonction de $\cos a$, c'est chercher toutes les valeurs de $\cos na$ qui répondent à une valeur donnée de $\cos a$, c'est-à-dire qui répondent à tous les arcs que détermine $\cos a$; mais ces arcs sont compris dans les formules

$$x = 2k\pi + \alpha, \quad x = 2k\pi - \alpha \quad \text{(p. 7)}.$$

Donc on doit trouver pour $\cos na$ toutes les valeurs de

$$\cos n(2k\pi + \alpha), \quad \cos n(2k\pi - \alpha).$$

Or $\cos n(2k\pi + \alpha) = \cos(2kn\pi + n\alpha) = \cos n\alpha$ (p. 5)

$$\cos n(2k\pi - \alpha) = \cos(2kn\pi - n\alpha) = \cos(-n\alpha) = \cos n\alpha$$
(p. 5 et 6).

Donc il n'y a qu'une seule valeur pour $\cos na$ en fonction de $\cos a$.

De même, chercher $\sin na$ en fonction de $\sin a$, c'est chercher les valeurs de $\sin na$ qui répondent à tous les arcs que détermine $\sin a$, lesquels sont

$$x = 2k\pi + \alpha, \quad x = (2k+1)\pi - \alpha; \quad \text{(p. 7)}$$

les valeurs trouvées sont donc celles de

$$\sin(2kn\pi + n\alpha), \quad \sin[(2kn+n)\pi - n\alpha].$$

Mais $\sin(2kn\pi + n\alpha) = \sin n\alpha$ (p. 5)

et $\sin[(2kn+n)\pi - n\alpha] = \sin(n\pi - n\alpha)$.

Si n est pair, cette dernière valeur se réduit à $\sin(-n\alpha) = -\sin n\alpha$; tandis que si n est impair, elle devient $\sin(\pi - n\alpha)$

$=\sin na$. Donc dans le premier cas $\sin na$ a deux valeurs, dans le second il n'en a qu'une.

PROPOSITION XIII.

Problème.

Trouver sin $\frac{1}{2}$ a, cos $\frac{1}{2}$ a *en fonction de* cos a.

A cet effet, dans la formule (4), prop. 12, on remplace a par $\frac{1}{2}a$, il vient

$$\cos^2\frac{1}{2}a-\sin^2\frac{1}{2}a=\cos a,$$

d'ailleurs $$\cos^2\frac{1}{2}a+\sin^2\frac{1}{2}a=1 \qquad \text{(p. 9, f. (1))}.$$

Ajoutant et retranchant successivement ces deux équations, on a

$$2\cos^2\frac{1}{2}a=1+\cos a, \quad 2\sin^2\frac{1}{2}a=1-\cos a,$$

d'où $$\cos\frac{1}{2}a=\pm\sqrt{\frac{1+\cos a}{2}},$$

$$\sin\frac{1}{2}a=\pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{2}}.$$

Remarque 1.—Fig. 7. Pour démontrer ces formules par la géométrie, soit l'arc ACB$=a$; menez le diamètre AD, tirez AB, DB, menez les rayons OC, OG respectivement perpendiculaires à ces droites, et tirez le sinus BH; AC sera $\frac{1}{2}$ ACB$=\frac{1}{2}a$, et l'on aura

$$\text{OH}=\cos a,\ \text{BE}=\text{AE}=\sin\frac{1}{2}a,\ \text{OE}=\cos\frac{1}{2}a.$$

De plus, à cause des parallèles, on a OE=FB.

Mais dans le Δ rectangle ABD, on a

$$\overline{AB}^2=AD\times AH,\quad \overline{BD}^2=AD\times DH.$$

Or, $AB=2BE=2\sin\frac{1}{2}a,\quad BD=2BF=2\cos\frac{1}{2}a;$

puis $AD=2r=2,\ AH=AO-OH=1-\cos a,$
$DH=OD+OH=1+\cos a;$

donc les relations ci-dessus donnent

$$4\sin^2\frac{1}{2}a=2(1-\cos a),\quad 4\cos^2\frac{1}{2}a=2(1+\cos a),$$

d'où $\sin\frac{1}{2}a=\pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{2}},\quad \cos\frac{1}{2}a=\pm\sqrt{\frac{1+\cos a}{2}}.$

Remarque 2. Ces formules montrent que $\sin\frac{1}{2}a$, $\cos\frac{1}{2}a$, exprimés en fonction de $\cos a$, ont chacun deux valeurs. Et, en effet, chercher une inconnue en fonction de $\cos a$, c'est chercher toutes les valeurs de cette inconnue qui répondent à tous les arcs que détermine ce cosinus. Mais α étant le plus petit arc positif déterminé par ce cosinus, tous les autres sont donnés par

$$2k\pi+\alpha,\quad 2k\pi-\alpha \qquad \text{(p. 7).}$$

Donc les valeurs de $\sin\frac{1}{2}a$ seront

$$\sin\left(\frac{2k\pi+\alpha}{2}\right),\quad \sin\left(\frac{2k\pi-\alpha}{2}\right),$$

ou $\sin\left(k\pi+\frac{1}{2}\alpha\right),\quad \sin\left(k\pi-\frac{1}{2}\alpha\right).$

Si k est pair, on a (p. 4)

$$\sin\left(k\pi+\frac{1}{2}\alpha\right)=\sin\frac{1}{2}\alpha$$

$$\sin\left(k\pi-\frac{1}{2}\alpha\right)=\sin\left(-\frac{1}{2}\alpha\right)=-\sin\frac{1}{2}\alpha.$$

Si k est impair, on a (p. 12)

$$\sin\left(k\pi+\frac{1}{2}\alpha\right)=-\sin\frac{1}{2}\alpha,\ \sin\left(k\pi-\frac{1}{2}\alpha\right)=\sin\frac{1}{2}\alpha.$$

Ainsi $\sin\frac{1}{2}a$ a deux valeurs : $+\sin\frac{1}{2}\alpha$, $-\sin\frac{1}{2}\alpha$.

On reconnaît de même que $\cos\frac{1}{2}a$ admet les valeurs

$$+\cos\frac{1}{2}\alpha,\ -\cos\frac{1}{2}\alpha.$$

Que si l'arc a est donné, on saura dans quel quadrant tombe la fin de $\frac{1}{2}a$, on saura donc quels sont les signes respectifs de $\sin\frac{1}{2}a$, $\cos\frac{1}{2}a$, ce qui suffit pour choisir parmi les valeurs que fournissent les formules.

PROPOSITION XIV.

Problème.

Trouver $\sin\frac{1}{2}a$, $\cos\frac{1}{2}a$, *en fonction de* $\sin a$.

Dans la formule (4), prop. 12, remplacez a par $\frac{1}{2}a$; il vient

$$\sin a=2\sin\frac{1}{2}a\ \cos\frac{1}{2}a,\quad 1=\sin^2\frac{1}{2}a+\cos^2\frac{1}{2}a,$$

posons $$\cos\frac{1}{2}a=x,\ \sin\frac{1}{2}a=y.$$

d'où $2xy = \sin a$, $x^2 + y^2 = 1$. (b)

Ajoutant et retranchant, on trouve

$$(x+y)^2 = 1 + \sin a, \quad \text{et } (x-y)^2 = 1 - \sin a.$$

Soit pour abréger $\sqrt{1+\sin a} = 2m$, $\sqrt{1-\sin a} = 2m'$; il vient

$$x+y = \pm 2m, \quad x-y = \pm 2m'.$$

Ce qui donne les quatre systèmes suivants :

$$\left\{\begin{matrix} x+y = 2m \\ x-y = 2m' \end{matrix}\right. \text{ d'où } \left.\begin{matrix} x = m+m' \\ y = m-m' \end{matrix}\right\} \quad (1)$$

$$\left\{\begin{matrix} x+y = 2m \\ x-y = -2m' \end{matrix}\right. \quad \left.\begin{matrix} x = m-m' \\ y = m+m' \end{matrix}\right\} \quad (2)$$

$$\left\{\begin{matrix} x+y = -2m \\ x-y = 2m' \end{matrix}\right. \quad \left.\begin{matrix} x = -m+m' \\ y = -m-m' \end{matrix}\right\} \quad (3)$$

$$\left\{\begin{matrix} x+y = -2m \\ x-y = -2m' \end{matrix}\right. \quad \left.\begin{matrix} x = -m-m' \\ y = -m+m' \end{matrix}\right\} . \quad (4).$$

Il y a donc quatre solutions pour la question ; mais si l'arc a est donné, on peut toujours reconnaître quelle est celle de ces solutions qui convient. A cet effet, posons $a = 2k\pi + 2\delta$, 2δ étant positif et $< 2\pi$. On aura $\frac{1}{2}a = k\pi + \delta$.

Supposons d'abord k pair ; l'arc $\frac{1}{2}a$ et l'arc δ se termineront au même point, comme cela arrive toujours pour a et 2δ. Cela posé, il y a quatre cas :

1° $2\delta < 90°$, d'où $\sin a > 0$, $m > m'$ et $\delta < 45$.

Il s'ensuit que $\frac{1}{2}a$ se termine entre 0 et 45° ; donc $\sin\frac{1}{2}a$ et $\cos\frac{1}{2}a$ sont > 0, et comme $m > m'$, c'est le système (1), ou le système (2) qui résout la question. Mais comme δ est $< 45°$, $\sin\frac{1}{2}a$ ou $\sin\delta$ est $< \cos\frac{1}{2}a$ ou $\cos\delta$; donc c'est (1),

c'est-à-dire $\cos\frac{1}{2}a=\frac{1}{2}\sqrt{1+\sin a}+\frac{1}{2}\sqrt{1-\sin a},$

$$\sin\frac{1}{2}a=\frac{1}{2}\sqrt{1+\sin a}-\frac{1}{2}\sqrt{1-\sin a}. \quad (5)$$

2° $2\delta < 180$, mais $> 90°$; encore $m > m'$; $\sin\frac{1}{2}a$ et $\cos\frac{1}{2}a$ sont > 0; mais comme δ tombe entre 45 et 90°. $\sin\delta$ est $> \cos\delta$, et l'on a le système (3).

3° $2\delta < 270$ et $> 180°$; ici $\sin a < 0$ et $m < m'$; d'ailleurs $\delta < 135$ et > 90, ce qui montre que $\sin\delta > 0$ et $\cos\delta < 0$; ce sont les formules (2) ou (4) qui conviennent. Mais entre 90 et 135 le sinus est $>$ la valeur absolue du cosinus; donc c'est (2).

4° $2\delta < 360$ et > 270; $\sin a < 0$, $m < m'$; $\sin\delta$ est > 0 et $\cos\delta < 0$; mais de 135 à 180, le sinus $<$ la valeur absolue du cosinus; donc c'est (4).

Supposons maintenant k impair. Dans ce cas $\frac{1}{2}a$ se termine dans le quadrant opposé à celui où tombe δ; ainsi les valeurs de $\sin\frac{1}{2}a$ et $\cos\frac{1}{2}a$ sont de signes contraires à celles de $\sin\delta$, $\cos\delta$, respectivement. Par suite

1° Si $2\delta < 90°$, les formules à prendre sont		(4)
2°	$2\delta < 180$ et $> 90°$,	(2)
3°	$2\delta < 270$ et $> 180°$,	(3)
4°	$2\delta < 360$ et $> 270°$,	(1).

Si donc le calcul donne quatre solutions, c'est parce que la même solution ne convient pas à toutes les valeurs de l'arc a.

Remarque. Soit α le plus petit arc positif qui répond à $\sin a$; tous les autres arcs qui y répondent sont compris dans les expressions $2k\pi+\alpha$, $(2k+1)\pi-\alpha$ (p. 7); ainsi les équations (*b*) ne changent pas si l'on remplace a par ces

valeurs. Il s'ensuit que y représente le sinus de la moitié, et x le cosinus de la moitié de tous ces arcs ; donc :

$$y=\sin\left(\frac{2k\pi+\alpha}{2}\right)=\sin\left(k\pi+\frac{1}{2}\alpha\right),$$

$$y=\sin\left(\frac{(2k+1)\pi-\alpha}{2}\right)=\sin\left(k\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right).$$

Si k est pair, ces formules se réduisent (p. 4) à

$$\sin\frac{1}{2}\alpha,\qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)=\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Si k est impair, elles se réduisent (p. 3) à $-\sin\frac{1}{2}\alpha$, $-\cos\frac{1}{2}\alpha$.

Ce qui fait les quatre valeurs $\pm\sin\frac{\alpha}{2}$, $\pm\cos\frac{\alpha}{2}$.

De même, pour $\cos\frac{1}{2}a$ on trouve les quatre valeurs $\pm\cos\frac{\alpha}{2}$, $\pm\sin\frac{\alpha}{2}$, ce qui est d'accord avec les systèmes (1), (2), (3), (4), en ce que les quatre valeurs de $\cos\frac{1}{2}a$ sont les mêmes que celles de $\sin\frac{1}{2}a$, etc.

PROPOSITION XV.

Problème.

Exprimer $\sin\frac{1}{3}a$ *et* $\cos\frac{1}{3}a$ *en fonction de* $\sin a$ *et* $\cos a$.

Dans les formules (5), (6), prop. 12, on remplace a par $\frac{1}{3}a$, et l'on a

$$(1)\qquad \sin a=3\sin\frac{1}{3}a-4\sin^3\frac{1}{3}a,$$

(2) $$\cos a = 4\cos^3\frac{1}{3}a - 3\cos\frac{1}{3}a.$$

Posons $\sin\frac{1}{3}a = x$; la première équation ordonnée devient

$$4x^3 - 3x + \sin a = 0;$$

ou (3) $$x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}\sin a = 0.$$

Cette équation a ses trois racines réelles et inégales ; pour le prouver on la compare à l'équation

(4) $$x^3 + px + q = 0.$$

La condition pour que les racines de celles-ci soient réelles et inégales, est

$$\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 < 0. \qquad (5)$$

Ici $p = -\frac{3}{4}$, $\frac{p}{3} = -\frac{1}{4}$; $q = \frac{1}{4}\sin a$;

donc cette inégalité devient

$$\left(-\frac{1}{4}\right)^3 + \left(\frac{1}{8}\sin a\right)^2 < 0,$$

ou $$-\frac{1}{64} + \frac{\sin^2 a}{64} < 0, \quad \text{ou} -1 + \sin^2 a < 0.$$

Mais si a n'est pas un multiple impair du quadrant, $\sin^2 a$ est < 1 ; donc la condition (5) est satisfaite.

La trigonométrie conduit au même résultat. En effet, les coefficients de l'équation (3) ne changent pas si l'on remplace l'arc a par l'un quelconque de ceux qui répondent au même sinus, et qui sont compris dans les deux expressions

$$2k\pi + \alpha, \quad (2k+1)\pi - \alpha \qquad \text{(p.7).}$$

Donc les valeurs de x sont

$$x = \sin\left(\frac{2k\pi + \alpha}{3}\right), \quad x = \sin\frac{(2k+1)\pi - \alpha}{3}.$$

Pour reconnaître le nombre de ces valeurs, il faut en exclure celles qui sont égales entre elles ; à cet effet, on extraira d'abord des arcs les circonférences entières qui y sont contenues. Le premier contient $2\pi\frac{k}{3}$; la partie entière de $\frac{k}{3}$ donnera des circonférences entières, dont on pourra faire abstraction ; le reste de la division de k par 3, ne pourra être que l'un des nombres 0, 1, 2 ; ce qui réduira l'arc à $\frac{2\pi.0+\alpha}{3}$, $\frac{2\pi.1+\alpha}{3}$, $\frac{2\pi.2+\alpha}{3}$; on aura ainsi les 3 valeurs de x : $x_1 = sin\,\frac{\alpha}{3}$, $x_2 = sin\frac{2\pi+\alpha}{3}$, $x_3 = sin\frac{4\pi+\alpha}{3}$.

Raisonnant de même sur le second arc, on sera aussi conduit à remplacer k par 0, 1, 2, et l'on aura 3 autres valeurs de x.

$$x_4 = sin\frac{\pi-\alpha}{3},\quad x_5 = sin\frac{3\pi-\alpha}{3},\quad x_6 = sin\frac{5\pi-\alpha}{3}.$$

Parmi ces six valeurs, la cinquième est égale à la première ; car les arcs $\frac{\alpha}{3}$, $\frac{3\pi-\alpha}{3}$ font en somme $\frac{3\pi}{3}$ ou π ; ils sont donc supplémentaires et $x_5 = x_1$ (p. 2).

De même $x_4 = x_2$, parce que la somme des arcs $\frac{2\pi+\alpha}{3}$, $\frac{\pi-\alpha}{3}$ est π.

Enfin $x_6 = x_3$; car

$$x_3 = sin\frac{4\pi+\alpha}{3} = -sin\left(\frac{\pi+\alpha}{3}\right) \qquad \text{(p. 3)}$$

et

$$x_6 = sin\left(\frac{5\pi-\alpha}{3}\right) = -sin\frac{2\pi-\alpha}{3}. \qquad (ib).$$

Mais la somme des arcs $\frac{\pi+\alpha}{3}$, $\frac{2\pi-\alpha}{3}$ est aussi π.

On a ainsi pour x trois valeurs :

$$x_1 = \sin\frac{\alpha}{3},\quad x_2 = \sin\frac{\pi-\alpha}{3},\quad x_3 = -\sin\frac{\pi+\alpha}{3}.$$

Ces valeurs sont différentes, sauf certains cas particuliers. Pour le montrer, faisons $\alpha = 0$; il vient

$$x_1 = 0,\quad x_2 = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\sqrt{3},\quad x_3 = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

Comme dans ce cas particulier elles sont différentes, il s'ensuit qu'en général elles ne sont pas égales.

L'équation relative à $\cos\frac{1}{3}a$ donne des résultats analogues.

Remarque. Dans le cas où $\sin^2 a = 1$, l'algèbre prouve que l'équation (3) a deux racines égales; la trigonométrie le prouve aussi. Car de $\sin^2 a = 1$ on tire $\sin a = \pm 1$; donc α, qui est $< 2\pi$ et > 0, est égal ou à $\frac{1}{2}\pi$ ou à $\frac{3}{2}\pi$. Si $\alpha = \frac{1}{2}\pi$, les trois valeurs de x deviennent

$$\sin\frac{\alpha}{3} = \sin\frac{1}{6}\pi,\quad \sin\frac{\pi-\alpha}{3} = \sin\frac{1}{6}\pi,\quad -\sin\frac{\pi+\alpha}{3} = -\sin\frac{1}{2}\pi.$$

Les deux premières sont égales entre elles et à $\frac{1}{2}$.

Si $\alpha = \frac{3}{2}\pi$, les valeurs de x deviennent

$$\sin\frac{\alpha}{3}\pi = \sin\frac{1}{2}\pi,\quad \sin\frac{\pi-\alpha}{3} = -\sin\frac{1}{6}\pi,$$

$$-\sin\frac{\pi+\alpha}{3} = -\sin\frac{5\pi}{6} = -\sin\frac{1}{6}\pi,$$

et les deux dernières sont égales entre elles.

Ce sont les seuls cas où deux des trois valeurs de x soient

égales entre elles. En effet, l'arc α étant moindre que 2π, les arcs $\frac{\alpha}{3}$, $\frac{\pi-\alpha}{3}$, $\frac{\pi+\alpha}{3}$, sont, en valeur absolue, moindres que π. Soit d'abord $\pi-\alpha>0$. Pour que $\sin\frac{\alpha}{3}=\sin\frac{\pi-\alpha}{3}$, il faut que $\frac{\alpha}{3}$ et $\frac{\pi-\alpha}{3}$, qui sont tous les deux moindres que π, soient égaux ou supplémentaires, c'est-à-dire que

$$\frac{\alpha}{3}=\frac{\pi-\alpha}{3} \quad \text{ou} \quad \frac{\alpha}{3}+\frac{\pi-\alpha}{3}=\pi.$$

La première équation donne $\alpha=\frac{1}{2}\pi$; la seconde donne $\pi=3\pi$, ce qui est absurde.

Pour que $\sin\frac{\pi-\alpha}{3}=-\sin\frac{\pi+\alpha}{3}$, il faut que l'arc $\frac{\pi-\alpha}{3}$ ou son supplément, ajouté à $\frac{\pi+\alpha}{3}$, fasse 2π, c'est-à-dire que

$$\frac{\pi-\alpha}{3}+\frac{\pi+\alpha}{3}=2\pi, \quad \text{ou que } \pi-\frac{\pi-\alpha}{3}+\frac{\pi+\alpha}{3}=\pi.$$

La première équation donne $2\pi=6\pi$, ce qui est absurde; la seconde $2\alpha=3\pi$ ou $\alpha=\frac{3\pi}{2}$.

Soit, en second lieu, $\pi-\alpha<0$; pour que $\sin\frac{\alpha}{3}=\sin\frac{\pi-\alpha}{3}$, il faut que $\frac{\alpha}{3}$ ou $\pi-\frac{\alpha}{3}$, ajouté à $\frac{\alpha-\pi}{3}$ fasse 2π, ce qui conduit à $\alpha=\frac{5\pi}{2}$ ou à $2\pi=6\pi$; le second résultat est absurde, le premier est en contradiction avec l'hypothèse $\alpha<2\pi$.

Dans le même cas de $\pi-\alpha<0$, si l'on veut que $\sin\frac{\pi-\alpha}{3}$

ou $-\sin\frac{\alpha-\pi}{3}$ soit égal à $-\sin\frac{\pi+\alpha}{3}$, il faut que $\frac{\alpha-\pi}{3}=\frac{\pi+\alpha}{3}$ ou que $\pi-\frac{\alpha-\pi}{3}=\frac{\pi+\alpha}{3}$; le premier cas donne $-\pi=\pi$, ce qui est absurde; le second $\alpha=\frac{3}{2}\pi$.

Enfin on trouvera que jamais $\sin\frac{\alpha}{3}$ n'est $=-\sin\frac{\pi+\alpha}{3}$.

Donc enfin il faut que $\alpha=\frac{1}{2}\pi$ ou que $\alpha=\frac{3}{2}\pi$.

Remarque 2. Les formules générales (8) et (9) établies prop. 12, peuvent servir à trouver de même $\cos\frac{a}{n}$, $\sin\frac{a}{n}$ en fonction de $\cos a$ et de $\sin a$.

PROPOSITION XVI.

PROBLÈME.

Trouver la tangente de la somme, et celle de la différence de deux arcs a, b, *en fonction des tangentes de ces arcs.*

On a en général (p. 9, formule (2)) $\tan g\, a=\frac{\sin a}{\cos a}$ en posant $r=1$.

Donc aussi

$$tg\,(a+b)=\frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)},$$

développant (p. 11)

$$=\frac{\sin a\cos b+\sin b\cos a}{\cos a\cos b-\sin a\sin b}.$$

Divisant haut et bas par $\cos a\,\cos b$, et simplifiant, il vient

$$tg(a+b)=\frac{\frac{\sin a}{\cos a}+\frac{\sin b}{\cos b}}{1-\frac{\sin a}{\cos a}\cdot\frac{\sin b}{\cos b}}$$

$$=\frac{tg\,a+tg\,b}{1-tg\,a.\,tg\,b}.$$

On trouvera de même

$$tg\,(a-b)=\frac{tg\,a-tg\,b}{1+tg\,a.tg\,b}.$$

Fig. 8. Pour démontrer par la géométrie la première de ces formules, soit l'arc AB$=a$, l'arc AC$=b$; de sorte que BAC$=a+b$. Menez en A une tangente indéfinie terminée aux rayons OB, OC, prolongés; menez de même en B une tangente terminée à OC prolongé; tirez OA, et menez EG perpendiculaire à OB. On aura

$$AD=tg\,a,\ \ AE=tg\,b,\ \ BF=tg\,(a+b).$$

Or les Δ semblables OBF, OGE donnent

$$BF:GE::OB:OG,\quad \text{d'où } BF=\frac{GE}{OG},$$

vu que OB$=r=1$.

D'un autre côté, les Δ semblables EGD, OAD donnent

$$GE:OA::ED:OD,\quad \text{d'où } GE=\frac{ED}{OD}\ldots OA=1.$$

La substitution de cette valeur de GE, dans celle de BF, donne

$$BF \text{ ou } tg\,(a+b)=\frac{ED}{OG.OD}.$$

Considérant le Δ EOD dont l'angle O est supposé aigu, on en tire

$$\overline{ED}^2=\overline{EO}^2+\overline{OD}^2-2OD.\,OG,$$

d'où $2\mathrm{OD}.\mathrm{OG}=\overline{\mathrm{EO}}^2+\overline{\mathrm{OD}}^2-\overline{\mathrm{ED}}^2$,

$$=séc^2b+séc^2a-(tg\,a+tg\,b)^2,$$

$$=séc^2b-tg^2b+séc^2a-tg^2a-2tg\,a.tg\,b.$$

Or $séc^2a-tg^2a=1=séc^2b-tg^2b$ (p.10, f. 6).

Donc $2\mathrm{OD}.\ \mathrm{OG}=2-2tg\,a\ tg\,b$.

Tirant de là OD.OG, substituant dans $tg(a+b)$ la valeur trouvée, ainsi que celle de $\mathrm{ED}=tg\,a+tg\,b$, on retrouve

$$tg\,(a+b)=\frac{tg\,a+tg\,b}{1-tg\,a.\,tg\,b}.$$

Remarque. On peut de même trouver $cot\,(a+b)$ en fonction de $cot\,a$, $cot\,b$; $séc\,(a+b)$ en fonction de $séc\,a$, $séc\,b$. Chacune de ces dernières, savoir $séc\,(a+b)$, $séc\,(a-b)$, présente une double valeur. Du reste $sin\,(a+b)$ en fonction de $sin\,a$, $sin\,b$, a quatre valeurs; il en est de même de $sin\,(a-b)$, etc.

PROPOSITION XVII.

Problème.

Trouver tg 2a, tg 3a, etc., *en fonction de* tg a.

Pour trouver $tg2a$, dans la valeur de $tg\,(a+b)$, on fera $b=a$, ce qui donne

(1) $$tg\,2a=\frac{2tg\,a}{1-tg^2a}.$$

Pour avoir $tg\,3a$, dans $tg\,(a+b)$ on fait $b=2a$, d'où

(2) $$tg\,3a=\frac{tg\,a+tg\,2a}{1-tg\,a\ tg\,2a}.$$

Remplaçant ici $tg\,2a$ par sa valeur trouvée, il vient

$$tg\,3a = \frac{tg\,a + \dfrac{2\,tg\,a}{1 - tg^2 a}}{1 - \dfrac{2\,tg^2 a}{1 - tg^2 a}}.$$

Multipliant haut et bas par $1 - tg^2 a$, et réduisant

$$tg\,3a = \frac{3\,tg\,a - tg^3 a}{1 - 3\,tg^2 a}.$$

On peut de même trouver $tg\,4a$, $tg\,5a$...

En général, les formules (8) et (9), prop. 12, donnent

$$\frac{sin\,na}{cos\,na} = tg\,na =$$

$$= \frac{n\,cos^{n-1}a.\,sin\,a - \dfrac{n^{3|-1}}{1^{3|1}}.cos^{n-3}a.\,sin^3 a + \dfrac{n^{5|-1}}{1^{5|1}}.cos^{n-5}a.\,sin^5 a - \text{etc.}}{cos^n a - \dfrac{n^{2|-1}}{1^{2|1}}\,cos^{n-2}a.\,sin^2 a + \dfrac{n^{4|-1}}{1^{4|1}}\,cos^{n-4}a.\,sin^4 a \ldots}$$

Divisant les deux termes par $cos^n a$, et ayant égard à $tg\,a = \dfrac{sin\,a}{cos\,a}$, on trouve

$$tg\,na = \frac{n\,tg\,a - \dfrac{n^{3|-1}}{1^{3|1}}.\,tg^3 a + \dfrac{n^{5|-1}}{1^{5|1}}.\,tg^5 a - \ldots}{1 - \dfrac{n^{2|-1}}{1^{2|1}}.\,tg^2 a + \dfrac{n^{4|-1}}{1^{4|1}}.\,tg^4 a - \ldots} \qquad (3)$$

Le numérateur s'arrête dès qu'il s'y présente une factorielle nulle; il en est de même du dénominateur.

PROPOSITION XVIII.

Problème.

Trouver $tg\,\frac{1}{2}a$, $tg\,\frac{1}{3}a$, etc., *en fonction de* $tg\,a$.

Pour obtenir $tg\frac{1}{2}a$, dans la formule (1), pr. 17, on remplace a par $\frac{1}{2}a$, et il vient

$$tg\,a = \frac{2\,tg\frac{1}{2}a}{1-tg^2\frac{1}{2}a}.$$

Posant $tg\frac{1}{2}a = x$, on a

$$(1-x^2)\,tg\,a = 2x.$$

Ordonnant $$x^2 + \frac{2}{tg\,a}.x - 1 = 0, \qquad (1)$$

d'où $$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+tg^2 a}}{tg\,a}. \qquad (2)$$

On a donc deux valeurs pour $tg\frac{1}{2}a$. En effet, les coefficients de l'équation en x ne changent pas si l'on remplace l'arc a par l'un quelconque des arcs qui répondent à $tg\,a$, et qui sont représentés par $k\pi+\alpha$ (p. 7), α étant toujours le plus petit arc positif qui répond à $tg\,a$. Donc l'expression de toutes les valeurs de x est

$$x = tg\frac{k\pi+\alpha}{2}.$$

Si k est pair, $\frac{k\pi}{2}$ est un nombre entier de demi-circonférences, qu'on peut supprimer (p. 3), et il vient

$$x = tg\frac{\alpha}{2}.$$

Si k est impair, c'est-à-dire de la forme $2k'+1$, on a

$$x=tg\frac{(2k'+1)\pi+\alpha}{2}=tg\left(k'\pi+\frac{\pi+\alpha}{2}\right)=tg\left(\frac{\pi+\alpha}{2}\right),$$

en supprimant les demi-circonférences ; mais

$$tg\left(\frac{\pi+\alpha}{2}\right)=tg\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)=-cot\frac{\alpha}{2}.$$

On a donc en effet deux racines

$$x_1=tg\frac{\alpha}{2},\quad x_2=-cot\frac{\alpha}{2},$$

dont le produit est d'ailleurs

$$x_1x_2=tg\frac{\alpha}{2}\times-cot\frac{\alpha}{2}=-1.$$

Ce qui est d'accord avec l'équation (1).

En général, pour avoir $tg\frac{a}{n}$, dans la formule (3), prop. 17, on remplacera na par a, a par $\frac{a}{n}$, et il viendra une équation du degré n par rapport à l'inconnue $tg\frac{a}{n}$.

Remarque 1. Si l'arc a est donné, et qu'on veuille calculer $tg\frac{1}{2}a$, il faut savoir quelle est celle des deux valeurs de x qui est à prendre : mettons l'arc a sous la forme $2k\pi+2\delta$, 2δ étant >0 et $<2\pi$. On aura

$$\frac{1}{2}a=k\pi+\delta.$$

Il y a plusieurs cas.

1° Si $2\delta<90°$, $tg\,a$ sera >0 ; la première valeur de x sera >0, la seconde <0. Or $\frac{1}{2}a$ tombera dans le premier

ou le troisième quadrant : donc $tg\frac{1}{2}a$ est >0, et c'est la première valeur $\frac{-1+\sqrt{1+tg^2a}}{tg\,a}$ qui convient.

2° $2\delta>90°$ et $<180°$. $tg\,a$ est <0, la première valeur de x est <0, la deuxième >0; mais $\frac{1}{2}a=k\pi+\delta$ tombe encore dans le premier ou le troisième quadrant; $tg\frac{1}{2}a$ est donc encore positif, et par suite

$$tg\frac{1}{2}a=\frac{-1-\sqrt{1+tg^2a}}{tg\,a}.$$

3° $2\delta>180°$ et $<270°$; $tg\,a$ est >0; $\frac{1}{2}a$ tombe dans le deuxième ou le quatrième quadrant; $tg\frac{1}{2}a$ est <0 et égal à $\frac{-1-\sqrt{1+tg^2a}}{tg\,a}$.

4° $2\delta>270°$ et $<360°$; $tg\,a<0$; $\frac{1}{2}a$ tombe encore dans le deuxième ou le quatrième quadrant; $tg\frac{1}{2}a$ est <0 et égal à $\frac{-1+\sqrt{1+tg^2a}}{tg\,a}$.

Remarque 2. L'expression de $tg\frac{1}{2}a$ peut se présenter sous plusieurs formes, en fonction de *sin a*, *cos a*.

On a
$$tg\frac{1}{2}a=\frac{\sin\frac{1}{2}a}{\cos\frac{1}{2}a}; \qquad (1)$$

multipliant les deux termes de la fraction par $2\sin\frac{1}{2}a$, on a

$$tg\frac{1}{2}a=\frac{2\sin^2\frac{1}{2}a}{2\sin\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}a};$$

Mais (p. 13) $\quad 2\sin^2\frac{1}{2}a=1-\cos a,$

et (p. 12) $\quad 2\sin\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}a=\sin a.$

Donc $$tg\frac{1}{2}a=\frac{1-\cos a}{\sin a}. \qquad (2)$$

Au lieu de multiplier par $2\sin\frac{1}{2}a$, multiplions par $2\cos\frac{1}{2}a$; il vient

$$tg\frac{1}{2}a=\frac{2\sin\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}a}{2\cos^2\frac{1}{2}a}=\frac{\sin a}{1+\cos a}. \qquad (3)$$

Ces deux expressions de $tg\frac{1}{2}a$ s'accordent, comme on peut le vérifier en les égalant.

Dans (1) on peut encore remplacer $\sin\frac{1}{2}a$ et $\cos\frac{1}{2}a$ par leurs valeurs tirées de la prop. 13, et on a

$$tg\frac{1}{2}a=\frac{\sqrt{1-\cos a}}{\sqrt{1+\cos a}}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{1+\cos a}}.$$

En multipliant les deux termes de la fraction par $1-\cos a$, on trouve

$$tg\frac{1}{2}a=\pm\frac{1-\cos a}{\sqrt{1-\cos^2 a}}. \quad (4)$$

Si on remplaçait ici $\sqrt{1-\cos^2 a}$, par $\sin a$, on trouverait encore pour $tg\frac{1}{2}a$ deux valeurs, $\pm\frac{1-\cos a}{\sin a}$, ce qui ne s'accorde pas avec la formule (2). Mais c'est que cette substitution est une erreur : $tg\frac{1}{2}a$ est tantôt positif, tantôt négatif : dans (4) c'est le double signe qui donne la faculté de choisir celle des deux valeurs qui convient. Ainsi quand $\frac{1}{2}a$ se termine dans les quadrants impairs, on a

$$tg\frac{1}{2}a=\frac{1-\cos a}{+\sqrt{1-\cos^2 a}}.$$

Or dans ce cas $\frac{1}{2}a$ est de la forme $q\pi+\delta$, δ étant $<90°$; par suite a est de la forme $2q\pi+2\delta$, et $\sin a=\sin 2\delta$, qui est >0, vu que $2\delta<180°$.

De là on conclut que dans ce même cas $\sin a=+\sqrt{1-\cos^2 a}$, et

$$tg\frac{1}{2}a=\frac{1-\cos a}{\sin a}.$$

Au contraire, si $\frac{1}{2}a$ tombe dans les quadrants pairs, δ est $>90°$ et $<180°$; $tg\frac{1}{2}a$ est <0, et $\sin a$ aussi est <0: dans ce cas . . . . .

$$tg\frac{1}{2}a=\frac{1-\cos a}{-\sqrt{1-\cos^2 a}} \text{ et } \sin a=-\sqrt{1-\cos^2 a},$$

d'où encore
$$tg\frac{1}{2}a=\frac{1-\cos a}{\sin a}.$$

C'est donc $\pm\sqrt{1-\cos^2 a}$ qu'il faut remplacer par $\sin a$ dans

$$tg\frac{1}{2}a=\frac{1-\cos a}{\pm\sqrt{1-\cos^2 a}}.$$

La formule
$$tg\frac{1}{2}a=\frac{-1\pm\sqrt{1+tg^2 a}}{tg\, a} \qquad (a)$$

donne lieu à une remarque semblable. On sait que

$$\pm\sqrt{1+tg^2 a}=séc\, a.$$

Or, ici encore, c'est dans le cas où il faut prendre devant le radical dans (a) le signe $+$ que $séc\, a$ est >0; et toutes les fois que dans (a) il faut prendre le signe—, $séc\, a$ est <0. En effet, mettant l'arc a sous la forme $2k\pi+2\delta$, on a reconnu tout à l'heure que si 2δ, qui est >0, se termine dans le premier et dans le quatrième quadrant, il faut prendre $tg\frac{1}{2}a=\frac{-1+\sqrt{1+tg^2 a}}{tg\, a}$; mais dans ce cas, $séc\, a= séc\,(2k\pi+2\delta)=séc\, 2\delta$ est précisément positif; par suite $tg\frac{1}{2}a=\frac{-1+séc\, a}{tg\, a}$. Au contraire, si 2δ tombe dans le deuxième ou le troisième quadrant, on a dû prendre $tg\frac{1}{2}a =\frac{-1-\sqrt{1+tg^2 a}}{tg\, a}$; mais dans ce cas $séc\, a$ est négatif et égal à $-\sqrt{1+tg^2 a}$; d'où encore

$$tg\frac{1}{2}a=\frac{-1+séc\, a}{tg\, a}.$$

PROPOSITION XIX.

PROBLÈME.

Établir une équation entre deux lignes trigonométriques, l'une de l'arc na, ***l'autre de l'arc*** ia, n ***et*** i ***étant entiers positifs.***

Soit x la ligne de l'arc na, y celle de l'arc ia; si x est un sinus ou un cosinus, on a $x=f(\sin na)$; s'il n'est ni l'un ni l'autre, les formules de la prop. 9 permettront de l'exprimer en fonction de $\sin na$; donc dans tous les cas on peut écrire :

$$x=f(\sin na).$$

De même $$y=\varphi(\sin ia).$$

Mais la formule (9) donne $\sin na$ et $\sin ia$ en fonction de $\sin a$; donc

on aura $$x=\mathrm{F}(\sin a)\ ,\ y=\mathrm{F}_1(\sin a).$$

Il ne reste plus qu'à éliminer $\sin a$ entre ces équations, et l'on aura la relation cherchée.

Remarque 1. Il sera souvent possible d'opérer d'une manière plus simple.

Par exemple, il s'agit de $x=\cos 3a$ et $y=tg\,a$.

Ici $$x=\cos 3a=4\cos^3 a-3\cos a,$$

et $$y=tg\,a=\frac{\sin a}{\cos a}=\frac{\sqrt{1-\cos^2 a}}{\cos a};$$

posant $\cos a=z$, on a à éliminer z entre les équations

$$x=4z^3-3z,\quad y=\frac{\sqrt{1-z^2}}{z},\ \text{ou } z^2y^2=1-z^2.$$

Remarque 2. Supposons qu'on cherche $tg\frac{1}{2}a$ en fonction de $\sin a$, et qu'à cet effet on parte de l'équation.

$$tg^2\frac{1}{2}a+\frac{2}{tg\,a}.\,tg\,\frac{1}{2}a-1=0,\qquad \text{(p. 18)}$$

ou

$$x^2+\frac{2}{tg\,a}.\,x-1=0.$$

On a $tg\,a=\frac{sin\,a}{cos\,a}=\frac{sin\,a}{\pm\sqrt{1-sin^2a}}$; donc l'équation devient

$$(1)\qquad x^2\pm\frac{2\sqrt{1-sin^2a}}{sin\,a}.\,x-1=0.$$

Cette équation est double, et donne pour x quatre valeurs. Cependant les arcs qui répondent à un sinus donné étant de la forme

$$2k\pi+\alpha\,,\ (2k+1)\pi-\alpha,$$

les valeurs de x doivent être

$$x=tg\frac{2\,k\pi+\alpha}{2}=tg\left(k\pi+\frac{1}{2}\alpha\right)=tg\frac{1}{2}\alpha,$$

et $$x=tg\frac{(2k\pi+1)\pi-\alpha}{2}=tg\left(k\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)=cot\frac{1}{2}\alpha.$$

Ce qui ne fait que deux valeurs.

Mais c'est que l'équation (1) donne x, non pas en fonction de $sin\,a$, mais bien en fonction de sin^2a; car elle ne change pas si l'on change $sina$ en $-sina$; il s'ensuit qu'elle convient aussi aux arcs

$$2\,k\pi-\alpha,\quad (2k+1)\pi+\alpha,$$

dont le sinus est $-sin\,\alpha$ ou $-sin\,a$; on a donc encore

$$x=tg\left(k\pi-\frac{1}{2}\alpha\right)=-\ tg\ \frac{1}{2}\alpha,$$

$$x=tg\,[(2k+1)\pi+\alpha]=-cot\frac{1}{2}\alpha,$$

ce qui complète les quatre valeurs.

PROPOSITION XX.

PROBLÈME.

Transformer une somme de deux sinus ou cosinus en un produit, et réciproquement.

On prend les formules

$$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\sin b\cos a,$$
$$\sin(a-b)=\sin a\cos b-\sin b\cos a,$$
$$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b,$$
$$\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b.$$

Ajoutant et retranchant les deux premières, puis les deux dernières, on a

(1) $\sin(a+b)+\sin(a-b)=2\sin a\cos b,$

(2) $\sin(a+b)-\sin(a-b)=2\sin b\cos a,$

(3) $\cos(a+b)+\cos(a-b)=2\cos a\cos b,$

(4) $\cos(a-b)-\cos(a+b)=2\sin a\sin b.$

Ici on posera $a+b=p,\quad a-b=q,$

d'où $a=\frac{1}{2}(p+q),\quad b=\frac{1}{2}(p-q),$

et (5) $\sin p+\sin q=2\sin\frac{1}{2}(p+q)\cos\frac{1}{2}(p-q),$

(6) $\sin p-\sin q=2\sin\frac{1}{2}(p-q)\cos\frac{1}{2}(p+q),$

(7) $\cos p+\cos q=2\cos\frac{1}{2}(p+q)\cos\frac{1}{2}(p-q),$

(8) $\cos q-\cos p=2\sin\frac{1}{2}(p+q).\sin\frac{1}{2}(p-q).$

Ces dernières formules transforment une somme et une différence de deux sinus ou de deux cosinus en un pro-

duit, ce qui est utile dans les calculs de logarithmes. S'il s'agissait de $\sin p+\cos q$, on remplacerait dans (5), (6), q par $90-q$.

Pour transformer, au contraire, un produit en une somme, on se servira des formules (1)-(4), qui donnent

$$\sin a \cos b=\frac{1}{2}\sin(a+b)+\frac{1}{2}\sin(a-b),$$

etc.

S'il s'agit d'un produit tel que $\sin a \cos b \sin c$, on aura d'abord

$$(9) \quad \sin a \cos b \sin c=\sin c\left(\frac{1}{2}\sin(a+b)+\frac{1}{2}\sin(a-b)\right),$$

$$=\frac{1}{2}\sin(a+b)\sin c+\frac{1}{2}\sin(a-b).\sin c;$$

mais si dans (4) on remplace a par $a+b$, et b par c, on en tire

$$\sin(a+b)\sin c=\frac{1}{2}\cos(a+b-c)-\frac{1}{2}\cos(a+b+c).$$

Changeant b en $-b$,

$$\sin(a-b).\sin c=\frac{1}{2}\cos(a-b-c)-\frac{1}{2}\cos(a-b+c).$$

Substituant dans (9), on trouve

$$\sin a \cos b \sin c=\frac{1}{4}\cos(a+b-c)-\frac{1}{4}\cos(a+b+c),$$

$$+\frac{1}{4}\cos(a-b-c)-\frac{1}{4}\cos(a-b+c).$$

Quel que soit le nombre des facteurs du produit, pourvu qu'ils ne soient affectés que d'exposants entiers positifs, ces facteurs étant des sinus ou cosinus, on pourra toujours transformer ce produit en une somme de termes du premier degré.

Corollaire. Les formules (5)-(8) donnent encore d'autres transformées. En divisant chacune d'elles, successivement par chacune des suivantes, on trouve

$$(10)\qquad \frac{\sin p+\sin q}{\sin p-\sin q}=\frac{\sin\frac{1}{2}(p+q)}{\cos\frac{1}{2}(p+q)}\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}(p-q)}{\sin\frac{1}{2}(p-q)}$$

$$=tg\,\frac{1}{2}(p+q)\,.\,\cot\frac{1}{2}(p-q)=\frac{tg\,\frac{1}{2}(p+q)}{tg\,\frac{1}{2}(p-q)}.$$

$$(11)\qquad \frac{\sin p+\sin q}{\cos p+\cos q}=\frac{\sin\frac{1}{2}(p+q)}{\cos\frac{1}{2}(p+q)}=tg\,\frac{1}{2}(p+q).$$

$$(12)\qquad \frac{\sin p+\sin q}{\cos q-\cos p}=\cot\frac{1}{2}(p-q).$$

$$(13)\qquad \frac{\sin p-\sin q}{\cos p+\cos q}=tg\,\frac{1}{2}(p-q).$$

$$(14)\qquad \frac{\sin p-\sin q}{\cos q-\cos p}=\cot\frac{1}{2}(p+q).$$

$$(15)\qquad \frac{\cos p+\cos q}{\cos q-\cos p}=\cot\frac{1}{2}(p+q).\cot\frac{1}{2}(p-q).$$

La formule (10) montre que *la somme des sinus de deux arcs* p, q, *est à la différence de ces mêmes sinus, comme la tangente de la demi-somme des arcs est à la tangente de leur demi-différence.*

Fig. 9. Pour démontrer cette formule géométrique-

ment, soit l'arc $AB=p$, l'arc $AC=q$; on aura $BC=p-q$, et si D est le milieu de BC, on a $DC=\frac{1}{2}(p-q)$; donc

$$AD=AC+CD=q+\frac{1}{2}(p=q)=\frac{1}{2}(p+q).$$

Soient menées les droites BE, CF perpendiculaires à AO, d'où

$$BE=\sin p, \quad CF=\sin q.$$

Tirons BC, OD, et du point I menons IK perpendiculaire, et IM parallèle à OA, on aura, comme prop. 11,

$$IK=\frac{1}{2}(BE+CF)=\frac{\sin p+\sin q}{2},$$

$$BM=\frac{1}{2}(BE-CF)=\frac{\sin p-\sin q}{2}.$$

Au point D menez à l'arc une tangente terminée aux prolongements des rayons OB, OA en G et H ;

$$DH \text{ sera} = tg\, AD = tg\,\frac{1}{2}(p+q),$$

$$DG \quad = tg\, DB = tg\,\frac{1}{2}(p-q).$$

Mais si l'on prolonge la corde BC jusqu'à OH, les Δ semblables IKL, BMI donneront

$$IK : BM :: IL : IB,$$

ou $$:: DH : DG,$$

à cause des parallèles.

Mettant pour ces lignes leurs expressions, on a

$$\frac{\sin p+\sin q}{2} : \frac{\sin p-\sin q}{2} :: tg\,\frac{1}{2}(p+q) : tg\,\frac{1}{2}(p-q).$$

On peut supprimer dans le premier rapport les dénominateurs, et l'on a (10)

Remarque. Les formules fondamentales de la trigonométrie donnent lieu à une infinité de formules dérivées, qui peuvent toujours se vérifier. A cet effet, si la formule ne renferme qu'un arc, on cherchera à réduire à une seule toutes les lignes trigonométriques qui y entrent. Par exemple, soit

$$\cos a = \frac{1}{1 + tg\, a.\, tg \frac{1}{2} a}.$$

On exprimera d'abord $tg\, a$ et $tg \frac{1}{2} a$ en fonction de $\sin a$ et de $\cos a$; puis, si cela ne suffit pas, on éliminera le sinus ou le cosinus au moyen de la relation $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$.

Ici $\quad tg\, a = \frac{\sin a}{\cos a}, \quad tg \frac{1}{2} a = \frac{1 - \cos a}{\sin a} \quad$ (p. 18, r., f. (3)).

d'où $$tg\, a.\, tg \frac{1}{2} a = \frac{1 - \cos a}{\cos a}.$$

Cette valeur substituée dans la formule donnée, il vient

$$\cos a = \frac{1}{1 + \frac{1 - \cos a}{\cos a}} = \frac{\cos a}{\cos a + 1 - \cos a} \text{ identité.}$$

Si la formule à vérifier renferme plusieurs arcs a, b, etc., indépendants l'un de l'autre, on réduira à une seule les lignes trigonométriques de l'arc a, de même que celles de l'arc b, et la formule devra devenir identique. Telle est

$$\sin (a + b) \sin (a - b) = \sin^2 a - \sin^2 b.$$

On remplacera ici

$$\sin (a + b) \text{ par } \sin a \cos b + \sin b \cos a,$$

et $$\sin (a - b) \text{ par } \sin a \cos b - \sin b \cos a,$$

d'où $$\sin (a + b) \sin (a - b) = \sin^2 a \cos^2 b - \sin^2 b \cos^2 a,$$

éliminant les cosinus $=\sin^2 a(1-\sin^2 b)-\sin^2 b(1-\sin^2 a)$,

$=\sin^2 a-\sin^2 b$,

ce qui rend la formule identique.

Si les arcs qui entrent dans la formule ne sont pas indépendants les uns des autres, on les réduira au moindre nombre possible au moyen des relations qui les lient, et on se trouvera ramené au cas précédent. Soit

$tg\,a+tg\,b+tg\,c=tg\,a\;tg\,b\;tg\,c$ avec $a+b+c=180°$.

De là $c=180-(a+b)$.

d'où $tg\,c=-tg\,(a+b)=\dfrac{-tg\,a-tg\,b}{1-tg\,a\;tg\,b}$,

d'où $tg\,c(1-tg\,a\;tg\,b)=-tg\,a\;tg\,b$.

Ce qui rentre dans la formule donnée.

LIVRE II.

RÉSOLUTION DES TRIANGLES RECTILIGNES ET SPHÉRIQUES.

§ 1. CALCUL DES TABLES.

Pour rendre les considérations exposées jusqu'ici applicables à la résolution des ∆, il faut calculer au moins une des deux séries de ∆ dont il a été question à la déf. 1 du liv. 1. L'hypothénuse de ces ∆ est le rayon, les côtés de l'angle droit sont les sinus et cosinus des angles aigus depuis 0° jusqu'à 90°. On supposera provisoirement encore le rayon $=1$, de sorte que la question est de calculer les sinus et cosinus en supposant que les arcs croissent d'après une certaine loi : nous admettrons, comme dans les tables de Callet, que les arcs suivent une progression arithmétique, dont la raison sera 10″. Ce calcul est fondé sur les principes suivants.

PROPOSITION I.

THÉORÈME. — FIG. 10.

Tout arc moindre qu'un quadrant est plus grand que son sinus et plus petit que sa tangente.

Soit l'arc AB $< 90°$; tirez OA, OB, puis la tangente AE de l'arc, et son sinus AD. Faites tourner la figure OAE autour de OE, afin de construire sa symétrique OEC par rapport à OE. La corde AC est $<$ l'arc ABC, qui est lui-même $<$ AEC. Prenant les moitiés, on a

$$AD < AB < AE,$$

ou

$$\sin a < a < \operatorname{tg} a.$$

PROPOSITION II.

THÉORÈME.

Soit i un arc infiniment petit : le rapport du sinus à l'arc différera infiniment peu de l'unité.

Car puisque $\sin i < i$, on a $\frac{\sin i}{i} < 1$.

D'un autre côté $\operatorname{tg} i > i$ ou $\frac{\sin i}{\cos i} > i$,

d'où

$$\frac{\sin i}{i} > \cos i.$$

Le rapport $\frac{\sin i}{i}$ est donc compris entre 1 et $\cos i$; mais si l'arc est infiniment petit, $1 - \cos i$ l'est aussi; donc $\frac{\sin i}{i}$ diffère infiniment peu de 1, de sorte qu'on peut poser

$$\frac{\sin i}{i} = 1 - \text{infiniment petit}.$$

Quant à ce que $1 - \cos i$ est infiniment petit si i l'est, on remarquera que cela signifie qu'on peut prendre l'arc assez petit pour que le cosinus s'approche du rayon d'aussi près qu'on veut, ce qui est évident, puisqu'à tout cosinus, de quelque peu qu'il soit inférieur au rayon, il répond un arc.

PROPOSITION III.

Théorème.

Si un arc fini absolu x *reçoit un accroissement infiniment petit,* i, *le rapport des variations* $\frac{\sin(x+i)-\sin x}{i}$ *se décompose en deux parties, dont l'une est* cos x, *et l'autre un infiniment petit; le rapport* $\frac{\cos(x+1)-\cos x}{i}$ *se décompose également en deux parties, dont l'une est* —sin x, *et l'autre un infiniment petit.*

1° Prenons la formule 6, l. 1, p. 20, pour y faire $p= x+i$, $q=x$, d'où $\frac{1}{2}(p+q)=x+\frac{1}{2}i$, $\frac{1}{2}(p-q)=\frac{1}{2}i$, et il vient

$$\frac{\sin(x+i)-\sin x}{i}=\frac{2\sin\frac{1}{2}i\cos\left(x+\frac{1}{2}i\right)}{i}$$

$$=\frac{\sin\frac{1}{2}i}{\frac{1}{2}i}.\cos\left(x+\frac{1}{2}i\right).$$

Or, d'après pr. 2, $\frac{\sin\frac{1}{2}i}{\frac{1}{2}i}=1$—infiniment petit; d'ailleurs $\cos\left(x+\frac{1}{2}i\right)=\cos x+$ infint pt. Donc notre rapport des différences se transforme en (1—infint pt) ($\cos x+$infint pt) $=\cos x+$infint pt; *c. q. f. d.*

2° Remplaçons x par $\frac{1}{2}\pi+x$; il vient

$$\frac{sin\left(\frac{1}{2}\pi+x+i\right)-sin\left(\frac{1}{2}\pi+x\right)}{i}=cos\left(\frac{1}{2}\pi+x\right)+\text{infin}^t\,\text{p}^t,$$

ou $$\frac{cos\,(x+i)-cos\,x}{i}=-sin\,x+\text{infin}^t\,\text{p}^t.$$

DÉF. 1. La partie finie du rapport des différences se nomme la *première dérivée*. Ainsi la première dérivée de $sin\,x$ est $cos\,x$ ou $sin\left(\frac{1}{2}\pi+x\right)$, celle de $cos\,x$ est $-sin\,x=cos\left(\frac{1}{2}\pi+x\right)$, de sorte que pour avoir la première dérivée du sinus ou du cosinus, il suffit d'ajouter $\frac{1}{2}\pi$ à l'arc. La *seconde dérivée* est la dérivée de la première, etc. (Voyez l'*algèbre*).

PROPOSITION IV.

PROBLÈME.

Développer le sinus et le cosinus suivant les puissances de l'arc.

On démontre en algèbre que si fx, $f'x$, $f''x$, etc., sont finies et réelles entre x et $x+h$, on a

$$f(x+h)=fx+hf'x+\frac{h^2}{2}f''x+\frac{h^3}{1^{3|1}}f'''x+\ldots+\frac{x^n}{1^{n|1}}f^n(x+\theta h)^*, \quad (a)$$

θ étant un nombre inconnu, mais compris entre o et $+1$. Faisant $x=o$, puis remplaçant h par x, on a

$$fx=fo+xf'o+\frac{x^2}{2}f''o+\ldots+\frac{x^n}{1^{n|1}}f^n\theta x\,, \qquad (1)$$

Ici on posera $fx=sin\,x$, d'où $fo=o$.

* Dans quelques cours d'algèbre on ne démontre peut-être pas cette formule avec la généralité nécessaire ici; c'est pourquoi nous avons donné à la fin de l'ouvrage une démonstration des formules (2) et (3) ci-après.

de là (p. 3) $f'x = sin\left(\frac{1}{2}\pi + x\right)$, $f'o = sin\frac{1}{2}\pi = 1$,

$$f''x = sin\left(\frac{2}{2}\pi + x\right),\quad f''o = sin\,\pi = o,$$

$$f'''x = sin\left(\frac{3}{2}\pi + x\right),\quad f'''o = sin\frac{3}{2}\pi = -1,$$

etc.

$$f^{n}x = sin\left(\frac{n}{2}\pi + x\right),\quad f^{n}\theta x = sin\left(\frac{n}{2}\pi + \theta x\right).$$

Donc (1) devient

$$sin\,x = x - \frac{x^3}{1^{3|1}} + \frac{x^5}{1^{5|1}} - \frac{x^7}{1^{7|1}} + \ldots + \frac{x^n}{1^{n|1}} sin\left(\frac{n}{2}\pi + \theta x\right). \quad (2)$$

En second lieu, faisons

$fx = cos\,x$ d'où $fo = 1$,

et $f'x = cos\left(\frac{1}{2}\pi + x\right)$ $f'o = o$,

$$f''x = cos\left(\frac{2}{2}\pi + x\right) \qquad f''o = 1,$$

$$f'''x = cos\left(\frac{3}{2}\pi + x\right) \qquad f'''o = o,$$

etc.

$$f^{n}x = cos\left(\frac{n}{2}\pi + x\right) \qquad f^{n}\theta n = cos\left(\frac{n}{2}\pi + \theta x\right).$$

Par suite (1) donne

$$cos\,x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{1^{4|1}} - \frac{x^6}{1^{6|1}} + \ldots + \frac{x^n}{1^{n|1}} cos\left(\frac{n}{2}\pi + \theta x\right). \quad (3)$$

PROPOSITION V.

PROBLÈME.

Calculer sin 10″ *et* cos 10″, *le rayon étant pris pour unité.*

On a $\pi=3,14159.26535.89793.23846.26434.+\ldots$

Le nombre des arcs de 10″, contenus dans la demi-circonférence est $180\times60\times6=64800$; donc l'arc de 10″, rapporté au rayon, est

$$arc\,10''=\frac{\pi}{64800}=0,00004.84813.68110.95347.5902+\ldots$$

Dans la formule (2), pr. 4, faisons $n=5$; elle donne

$$\sin x=x-\frac{x^3}{1^{3|1}}+\frac{x^5}{1^{5|1}}\sin\left(\frac{5}{2}\pi+\theta x\right).$$

Si donc on prend $\sin x=x-\frac{x^3}{1^{3|1}}$, l'erreur sera $<+\frac{x^5}{1^{5|1}}$.

Car $\sin\left(\frac{5}{2}\pi+\theta x\right)<1$.

Prenons $x=\frac{\pi}{64800}=0,00004$ etc.

On trouve $\sin 10''=0,00004.\,84813.\,68091.\,96134+$ une fraction moindre que $1:10^{20}$, en ayant égard aux erreurs de x, de $\frac{x^3}{1^{3|1}}$, et à $\frac{x^5}{1^{5|1}}$.

Pour calculer le $\cos 10''$, on a

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{1^{4|1}}-\frac{x^6}{1^{6|1}}\cos\left(\frac{6}{2}\pi+\theta x\right).$$

Et en faisant $\cos x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{1^{4|1}}$, on commet une erreur $<\frac{x^6}{1^{6|1}}$.

Ayant aussi égard aux erreurs de $\frac{x^2}{2}$, $\frac{x^4}{1^{4|1}}$, on trouve

$$\cos 10''=0,99999.99988.24778.47327-\text{etc.},$$

erreur $<1:10^{20}$.

Tous ces nombres ont été calculés avec trois chiffres de plus, afin que l'erreur ait pu être calculée avec d'autant plus de précision.

PROPOSITION VI.

PROBLÈME.

Calculer les sinus et cosinus de 10″ *en* 10″, *pour le premier quadrant, en supposant connus* sin 10″ *et* cos 10″.

Il suffira de se borner à la moitié du quadrant; car deux arcs tels que $45°+m$ et $45°-m$, étant complémentaires, on a

$$\sin(45°+m)=\cos(45°-m)$$
$$\cos(45°+m)=\sin(45°-m).$$

Ce qui montre que, les sinus et cosinus étant calculés jusqu'à 45°, pour avoir le sinus d'un arc $45°+m$ plus grand que 45°, il suffit de prendre le cosinus de son complément $45°-m$ qui est $<45°$. De même le cosinus.

Cela posé, les formules (1), (3), p. 20, l. 1, donnent

$$\sin(a+b)=\sin a\times 2\cos b-\sin(a-b)$$
$$\cos(a+b)=\cos a\times 2\cos b-\cos(a-b).$$

Les arcs $a-b$, a, $a+b$ forment une progression arithmétique dont la raison est b; posons $a-b=t$, $a=t_1$, $a+b=t_2$; nous supposerons d'ailleurs $b=10''$; $\cos 10''$ est un nombre connu que nous nommerons β: il vient

$$\sin t_2=2\beta.\sin t_1-\sin t \qquad (1)$$
$$\cos t_2=2\beta.\cos t_1-\cos t.$$

Si l'on fait ici $t=0$, on aura $t_1=10''$, $t_2=20''$; ces formules donnent donc le sinus et le cosinus de 20″; posant ensuite $t=10''$, $t_1=20''$, on aura $t_2=30''$, dont ces mêmes formules donneront le sinus et le cosinus. En général, connaissant les sinus et cosinus de deux termes

consécutifs de la progression 0, 10″, 20″, 30″, etc., on trouvera le sinus du terme suivant en multipliant celui du précédent par 2β, et retranchant celui du terme antéprécédent. De même pour le cosinus.

Mais comme 2β est un nombre qui diffère très-peu de 2, on peut simplifier l'opération; nommant k la différence 2—2β, qui est égale à 0,00000 00023 50444—etc., on a $2\beta=2-k$, et les formules (1) deviennent

$$\sin t_2 = 2\sin t_1 - \sin t - k\sin t_1$$

$$\cos t_2 = 2\cos t_1 - \cos t - k\cos t_1.$$

De là $\quad \sin t_2 - \sin t_1 = \sin t_1 - \sin t - k\sin t_1 \qquad (2)$

$$\cos t_2 - \cos t_1 = \cos t_1 - \cos t - k\cos t_1. \qquad (3)$$

Lorsqu'on connaîtra la différence $\sin t_1 - \sin t$, il suffira d'en retrancher $k \sin t_1$ pour obtenir la différence $\sin t_2 - \sin t_1$; à celle-ci on ajoutera $\sin t_1$ et l'on aura $\sin t_2$. Même série d'opérations pour avoir $\cos t_2$. Les produits $k \sin t_1$, $k \cos t_1$, etc., sont plus simples à faire que $2\beta \sin t_1$, $2\beta \cos t_1$; du reste, en prenant le facteur constant k pour multiplicande, on n'a qu'à faire une fois pour toutes les produits partiels k, $2k$, $3k, \ldots\ldots 9k$; ce sont les seuls qui puissent entrer dans les différents nombres $k \sin t_1$, $k \cos t_1$, etc.

Le tableau suivant indique le progrès de l'opération pour le sinus, en nommant α le sinus 10″.

Arcs.	Différences des sinus.	Sinus.
0″	0	0
10″	$\alpha = d$	α
20″	$\alpha - k\alpha = d_1$	$\alpha + d_1 = \alpha_1$
30″	$d_1 - k\alpha_1 = d_2$	$\alpha_1 + d_2 = \alpha_2$
40″	$d_2 - k\alpha_2 = d_3$	$\alpha_2 + d_3 = \alpha_3$
etc.		

Ainsi dans (2) posant $t=0$, on a $\sin t_1 = \alpha$; d'où

$$\sin t_2 - \sin t_1 = \alpha - k\alpha = \sin 20'' - \sin 10''.$$

Cette différence a été nommée d_1 ; en l'ajoutant à *sin* 10″ ou α, on a le *sin* 20″, qui a été nommé α_1.

De la différence $d_1 = \sin 20'' - \sin 10''$, on retranche $k\alpha_1$ ou $k \sin 20''$; le reste $d_1 - k\alpha_1$ a été nommé d_2 : c'est la valeur de $\sin 30'' - \sin 20''$; en y ajoutant α_1 ou *sin* 20″, on trouve *sin* 30″ représenté par α_2, etc.

Les sinus et cosinus étant calculés, on en calcule les logarithmes.

I. Pour vérification, on peut calculer directement les sinus et cosinus de 9 en 9°, même de 3 en 3°.

En effet, le côté du décagone régulier inscrit soustend un arc de 36° : il est donc double de *sin* 18° : représentons ce sinus par x ; le côté du décagone sera $2x$; mais ce côté est le plus grand segment du rayon divisé en moyenne et extrême raison ; le rayon étant 1, l'un des segments $2x$, l'autre sera $1-2x$, et on aura la proportion

$$1:2x::2x:1-2x,$$

d'où $$4x^2=1-2x, \quad 4x^2+2x-1=0$$

et $$x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}.$$

La racine positive est le sinus de 18° ; donc

$$\sin 18^\circ=\cos 72^\circ=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}.$$

De là $$\cos 18^\circ=\sqrt{1-\sin^2 18}=\sqrt{1-\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}=\sin 72^\circ.$$

Au moyen des formules (3), (4), p. 12, l. 1, où l'on fera $a=18^\circ$, on trouvera

$$\sin 36^\circ = \cos 54^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}},$$

$$\cos 36^\circ = \sin 54^\circ = \frac{1}{4}(1+\sqrt{5}).$$

On peut trouver maintenant $\sin 9^\circ$, $\cos 9^\circ$, $\sin 27^\circ$, $\cos 27^\circ$. A cet effet, dans les formules (5), p. 14, l. 1, on fera successivement $a=18$, $a=54$, ce qui donne

$$\sin 9^\circ = \cos 81^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{3+\sqrt{5}} - \frac{1}{4}\sqrt{5-\sqrt{5}},$$

$$\cos 9^\circ = \sin 81^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{3+\sqrt{5}} + \frac{1}{4}\sqrt{5-\sqrt{5}},$$

$$\sin 27^\circ = \cos 63^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{5+\sqrt{5}} - \frac{1}{4}\sqrt{3-\sqrt{5}},$$

$$\cos 27^\circ = \sin 63^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{5+\sqrt{5}} + \frac{1}{4}\sqrt{3-\sqrt{5}}.$$

On a aussi $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Ensuite $\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$,

$$\sin 60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

Pour avoir $\sin 3^\circ$, dans la formule qui donne $\sin(a-b)$, on fait $a=30^\circ$, $b=27^\circ$; on trouve

$$\sin 3^\circ = \sin 30^\circ \cos 27^\circ - \sin 27^\circ \cos 30$$

$$= \frac{1}{8}\sqrt{5+\sqrt{5}} + \frac{1}{8}\sqrt{3-\sqrt{5}} - \frac{1}{8}\sqrt{15+3\sqrt{5}} + \frac{1}{8}\sqrt{9-3\sqrt{5}}$$

$$= \cos 87^\circ.$$

De même $\cos 3^\circ = \cos 30^\circ \cos 27 + \sin 30^\circ \sin 27^\circ$

$$=\frac{1}{8}\sqrt{15+3\sqrt{5}}+\frac{1}{8}\sqrt{9-3\sqrt{5}}-\frac{1}{8}\sqrt{5+\sqrt{5}}-\frac{1}{8}\sqrt{3-\sqrt{5}}.$$

Les sinus et cosinus de 6° se déduiront de ce que $6^\circ = 36^\circ - 30^\circ$, etc.

Du reste, cette méthode peut être employée à calculer les sinus de 10″ en 10″, jusqu'à 90°.

II. Pour le prouver, reprenons la formule

$$\sin t_2 = 2\cos 10'' \sin t_1 - \sin t. \qquad (1)$$

Soit, comme plus haut, β la valeur approchée de $\cos 10''$, que j'appelle $\cos a$, i l'erreur, on a

$$\cos a = \beta + i. \qquad (2)$$

Soit α_n la valeur approchée de $\sin t_n$, e_n l'erreur; de façon que

$$\sin t_n = \alpha_n + e_n, \qquad (3)$$
$$\sin t_{n+1} = \alpha_{n+1} + e_{n+1}.$$

La formule (1) donne

$$\sin t_{n+1} = 2\cos a \sin t_n - \sin t_{n-1}, \qquad (4)$$

ou $\alpha_{n+1} + e_{n+1} = 2\cos a(\alpha_n + e_n) - \alpha_{n-1} - e_{n-1},$

$$= 2\cos a.\alpha_n + 2e_n \cos a - \alpha_{n-1} - e_{n-1},$$

ou, d'après (2), $= 2\beta\alpha_n - \alpha_{n-1} + 2e_n \cos a - e_{n-1} + 2i\alpha_n.$

Dans $2\beta\alpha_n - \alpha_{n-1}$ on ne conserve pas tous les chiffres; soit γ_n la partie qu'on néglige; il vient

$$e_{n+1} = 2e_n \cos a - e_{n-1} + 2i\alpha_n + \gamma_n. \qquad (5)$$

Je pose pour abréger, $2i\alpha_n + \gamma_n = \delta_n$. (6)

et j'ai $e_{n+1} = 2e_n \cos a - e_{n-1} + \delta_n$ *; (7)

* Équation aux différences finies. V. la note de la page 104.

faisant $n=1, 2, 3, \ldots$ et observant que e_0 est nul, comme étant l'erreur de *sin o*, on a

$$e_2=2e_1 \cos a+\delta_1, \qquad (8)$$

$$e_3=2e_2 \cos a-e_1+\delta_2, \qquad (9)$$

$$e_4=2e_3 \cos a-e_2+\delta_3. \qquad (10)$$

r étant entier et $< n$, on a

$$e_{n-r}=2e_{n-r-1} \cos a-e_{n-r-2}+\delta_{n-r-1}.$$

$$e_{n-r+1}=2e_{n-r}.\cos a-e_{n-r-1}+\delta_{n-r},$$

$$e_{n-r+2}=2e_{n-r+1}.\cos a-e_{n-r}+\delta_{n-r+1},$$

. . . .

$$e_{n+1}=2e_n \cos a-e_{n-1}+\delta_n.$$

On peut éliminer entre ces équations e_n, e_{n-1}, etc. e_2 ; à cet effet il suffit d'avoir égard à la formule (1), et d'ajouter les équations précédentes depuis (8), après les avoir multipliées respectivement, et à partir de (8) par $\sin na$, $\sin(n-1)a$, $\sin(n-2)a$, etc., $\sin(r+2)a$, $\sin(r+1)a$, $\sin ra$, etc., $\sin a$. On transposera dans le second membre tous les termes, hors $e_{n+1}.\sin a$, et il vient, en ordonnant convenablement

$$\begin{aligned} e_{n+1}.\sin a = & \, e_1(2\cos a \sin na-\sin(n-1)a) \\ & +e_2[2\cos a \sin(n-1)a-\sin(n-2)a-\sin na] \\ & + \ldots \\ & +e_{n-r}[2\cos a \sin(r+1)a-\sin ra-\sin(r+2)a] \\ & + \ldots \\ & +e_n(2\cos a \sin a-\sin 2a) \\ & +\delta_1 \sin na+\sin(n-1)a+\ldots+\delta_n \sin a. \end{aligned}$$

Or la formule (1), si l'on y fait $t=ra$, par suite $t_1=(r+1)a$, montre que le coefficient de e_{n-r} est zéro ; celui de e_1 se réduit de même à $\sin(n+1)a$. De là

$$e_{n+1}=[e_1 \sin(n+1)a+\delta_1 \sin na+\delta_2 \sin(n-1)a+\ldots+\delta_n \sin a] : \sin a$$

Supposons que les calculs se fassent avec 17 chiffres dé-

cimaux; il s'ensuit que $\gamma_n < \frac{1}{10^{17}}$ et $i < \frac{4}{10^{18}}$, d'après la valeur de *cos* 10″.

Donc $\quad \delta_n = \gamma_n + 2i\alpha_n < \frac{1}{10^{17}} + 2i < \frac{18}{10^{18}}$, et

$$e_{n+1} < \frac{e_1}{\sin a} + \frac{18}{10^{18}}[\sin na + \sin(n-1)a + \ldots \sin a] : \sin a.$$

Posons

$$\sin a + \sin 2a + \ldots + \sin(n-2)a + \sin(n-1)a + \sin na = X.$$

Multipliant cette égalité par $2\sin a$ et transformant chaque terme par la forme, pr. 20, l. 1, qui donne

$$2\sin a \sin ma = \cos(m-1)a - \cos(m+1)a,$$

on a

$$2X\sin a = 1 - \cos 2a + \cos a - \cos 3a + \cos 2a - \cos 4a + \ldots$$
$$+ \cos(n-2)a - \cos(na) + \cos(n-1)a - \cos(n+1)a;$$

donc $\quad X = \dfrac{1 + \cos a - \cos na - \cos(n+1)a}{2\sin a}$

et $\quad e_{n+1} < \dfrac{e_1}{\sin a} + \dfrac{18}{10^{18}} \cdot \dfrac{1 + \cos a - \cos na - \cos(n+1)a}{2\sin a}$. (11)

Les erreurs s'accumulant, comme on voit, la plus forte répond au cas où l'on pousserait les calculs jusqu'à 90°. Posons donc $(n+1)a = 90°$, d'où $\cos(n+1)a = o$, $\cos na = \cos(90 - a) = \sin a$, et (11) devient

$$e_{n+1} < \frac{e_1}{\sin a} + \frac{9}{10^{18}} \cdot \frac{1 + \cos a - \sin a}{\sin^2 a}. \qquad (12)$$

e_1, erreur de $\sin 10''$ est $< \frac{2}{10^{18}}$; $\sin a$ ou $\sin 10'' > 0{,}000048 = \frac{48}{10^6}$ et $\sin^2 a > \frac{2304}{10^{12}}$;

Ayant égard aux valeurs de $\cos a$, $\sin a$, on a $\cos a - \sin a$

$< 0,9999999989 - 0,0000484136 = 0,9999515853$;
par suite

$$e_{n+1} < \frac{2}{48.10^{12}} + \frac{9}{10^{18}} \cdot \frac{1,99996}{2304} . 10^{12} = \frac{1}{24.10^{12}} + \frac{1,99996}{256.10^{6}} =$$
$$\frac{1}{24.10^{12}} + \frac{7813}{10^{12}} < \frac{7820}{10^{12}} < \frac{8}{10^{9}}.$$

Donc la formule (1) peut servir à calculer les sinus des arcs de 10″ en 10″, de 0 à 90°, et la plus forte erreur sera $< \frac{8}{10^9}$, ce qui est plus que suffisant pour qu'on puisse calculer les logarithmes sinus à moins de $5 : 10^8$. D'ailleurs les sinus seront exprimées par 17 chiffres décimaux, et l'erreur est > 0.

Supposons que les erreurs de *sin* 10″, *cos* 10″ soient $< \frac{1}{10^c}$, que tous les calculs soient faits avec c chiffres : on aura δ_n, ou $\gamma_n + 2i\alpha_n < 3 : 10^c$, $e_1 < 1 : 10^c$. Donc l'erreur sur *sin* 90° sera $< \frac{1}{48.10^{c-6}} + \frac{3.1,99996}{2.2304.10^{c-12}} =$

$$< \frac{1}{48.10^{c-6}} + \frac{3}{2304.10^{c-12}} = \frac{1000128}{768.10^{c-6}} < \frac{1302}{10^{c-6}}.$$

Si donc on veut que la plus forte erreur soit $< \frac{1}{10^h}$, on n'a qu'à poser $\frac{1302}{10^{c-6}} < \frac{1}{10^h}$, d'où $10^{c-6} > 1302.10^h$, et il suffit que $c - 6 = h + 4$, ou $c = h + 10$. On n'a donc qu'à conserver dans les calculs 10 décimales au delà de celles qu'on veut obtenir exactement.

Que s'il s'agit de calculer le sinus ou le cosinus d'un arc donné, par exemple *sin*(56°+17′+25″), on prendra parmi les multiples de 9° celui qui se rapproche le plus de notre arc ; ici c'est l'arc de 54°. Le sinus et le cosinus de 54° sont connus et peuvent être calculés avec autant de déci-

males qu'on veut. La différence entre $56° 17' 25''$ et $54°$ est $2° 17' 25''$, qu'on représentera par x, et l'on aura

$$\sin(56°+17'+25'')=\sin(54°+x)=\sin 54° \cos x+\cos 54° \sin x.$$

Or $x=8245''=\frac{8245}{648000}$ par rapport au rayon.

Cette fraction étant fort petite, les séries (2) et (3), p. 4, seront très-convergentes. On en déduira donc les valeurs de $\sin x$ et $\cos x$; par suite on aura le sinus cherché.

IV. L'usage de supposer le rayon$=1$ n'a pas prévalu dans la construction des tables, et ce par une raison assez insignifiante : on y a supposé le rayon$=10^{10}$; or, si dans l'hypothèse de $r=1$, on a par exemple

$$\sin a=m,$$

en rétablissant le rayon, on aura (l. 1, p. 8)

$$\sin a=rm \text{ et } \log \sin a=\log r+\log m.$$

Dans le cas où $r=10^{10}$, on a $\log r=10$; il faudra donc ajouter dix unités entières à chaque *log sin* ou *log cos* déjà calculé.

Les logarithmes des tangentes se déduisent facilement de ceux des sinus et cosinus. Car on a

$$tg\, a=\frac{r \sin a}{\cos a},$$

d'où $$\log tg\, a=\log \sin a-\log \cos a+10.$$

Quant à la cotangente, puisque $\cot a=\frac{r^2}{tg\, a}$, on a

$$\log \cot a=20-\log tg\, a.$$

V. Les tables ainsi calculées fournissent les moyens de trouver par approximation les logarithmes des lignes trigonométriques relatives aux arcs autres que ceux qui sont compris dans les tables mêmes, et réciproquement.

A cet effet, les tables donnent les différences entre les

logarithmes successifs des sinus, cosinus, etc. S'il s'agit, par exemple, d'avoir le *log sin* 16° 32′, 28″, on cherche dans les tables celui de *sin* 16°-32′ 20″, qui est 9,454 3357; la différence est 709. Cela posé, on fait la proportion $10'' : 8'' :: 709 : x$, la valeur de x, ajoutée au log. sin. tabulaire, on trouve *log sin* 10° 32′ 28″=9,4543924.

De même, supposons qu'on donne $\log \sin a = 9{,}0567650$, et qu'on demande l'arc a.

On cherche dans la table le log. sin. le plus approchant en moins de celui qui est donné : c'est 9,0566218 qui répond à 6° 32′ 30″, et dont la différence avec le logarithme donné est 1432; la différence tabulaire est 1836 et correspond à 10″; on fera la proportion

$$1836 : 1432 : 10'' : x, \quad \text{d'où } x = 7'',8$$

et $$a = 6^\circ\, 32'\, 37'',\, 8.$$

On voit donc que l'on regarde les différences des arcs comme étant proportionnelles à celles des logarithmes des lignes trigonométriques. De là des erreurs que nous allons mesurer.

PROPOSITION VII.

Théorème.

Le rapport d'un arc a+b *à un autre plus petit*, a, *surpasse le rapport des sinus, pourvu que ces arcs soient moindres que* $\frac{1}{2}\pi$.

En effet, la formule (a), pr. 4, donne

$$f(x+h) = fx + hf'(x+\theta h).$$

Posant $fx = \sin x$, il vient, substitution faite de a pour x et de b pour h,

$$\sin(a+b) = \sin a + b \cos(a+\theta b)\,;$$



d'où $$\frac{\sin(a+b)}{\sin a}=1+\frac{b.\cos(a+\theta b)}{\sin a}. \qquad (1)$$

Or, je dis que $\frac{\cos(a+\theta b)}{\sin a}<\frac{1}{a}$; car

$$a<tg\,a=\frac{\sin a}{\cos a};\ \text{d'où}\ \frac{\cos a}{\sin a}<\frac{1}{a};$$

mais $\cos(a+\theta b)<\cos a$; donc, à fortiori, $\frac{\cos(a+\theta b)}{\sin a}<\frac{1}{a}$,

et (1) devient $\frac{\sin(a+b)}{\sin a}<1+\frac{b}{a}=\frac{a+b}{a}$, *c. q. f. d.*

PROPOSITION VIII.

Théorème.

Soient trois arcs croissants n, n+d, n+h; *si l'on pose la proportion* h : d :: sin (n+h) − sin n : x, *le* 4ᵉ *terme sera* $<\sin(n+d)-\sin n$; *mais la différence sera* $<\frac{1}{2}h^2$, *les arcs étant* $<\frac{1}{2}\pi$.

Car $$\frac{\sin(n+h)-\sin n}{\sin(n+d)-\sin n}=\frac{\sin\frac{1}{2}h.\cos(n+\frac{1}{2}h)}{\sin\frac{1}{2}d.\cos(n+\frac{1}{2}d)}. \qquad (1)$$

Mais il est prouvé (p. 5) que $\frac{\sin\frac{1}{2}h}{\sin\frac{1}{2}d}<\frac{\frac{1}{2}h}{\frac{1}{2}d}=\frac{h}{d}$;

de plus $\cos(n+\frac{1}{2}h)<\cos(n+\frac{1}{2}d)$, vu que $h>d$.

Donc

$$\frac{sin(n+h)-sin\,n}{sin(n+d)-sin\,n}<\frac{h}{d},\ \text{et}\ sin(n+d)-sin\,n>\frac{d}{h}(sin(n+h)-sin\,n)$$

c'est-à-dire $>x$.

D'un autre côté $sin\,(n+d)-sin\,n=2\,sin\frac{1}{2}d\,cos\,(n+\frac{1}{2}d)$ $<d\,cos\,n$, et à cause de (a), pr. 7,

$$sin\,(n+h)-sin\,n=h\,cos\,n-\frac{h^2}{2}cos\,(n+\theta h)>h\,cos\,n-\frac{h^2}{2};$$

de là

$$\frac{sin\,(n+d)-sin\,n}{sin\,(n+h)-sin\,n+\frac{h^2}{2}}<\frac{d}{h},$$

puis $sin\,(n+d)-sin\,n<\frac{d}{h}(sin\,(n+h)-sin\,n)+\frac{dh}{2}$,

et à fortiori $<\frac{d}{h}(sin\,(n+h)-sin\,n)+\frac{h^2}{2}$, vu que

$d<h$, ou $<x+\frac{h^2}{2}$.

PROPOSITION IX.

Théorème.

Avec les mêmes arcs, si l'on fait la proportion

$\sin(n+h)-\sin n : \sin(n+d)-\sin n :: \log\sin(n+h)- \log\sin n : y$,

y *sera* $<\log\sin(n+d)-\log\sin n$, *mais la différence sera* $<\frac{h^2 cot^2 n}{16}$.

Car il est prouvé (*Alg.*) que la différence entre $log\,sin\,(n+d)$ $-log\,sin\,n$ et y est moindre que le carré d'une fraction

qui a pour numérateur la différence des termes extrêmes $\sin(n+h)$ et $\sin n$, et pour dénominateur 4 fois le plus petit terme $\sin n$, c'est-à-dire moindre que

$$\frac{(\sin(n+h)-\sin n)^2}{16\sin^2 n}=\frac{\left[2\sin\frac{1}{2}h\cos(n+\frac{1}{2}h)\right]^2}{16\sin^2 n}<\frac{h^2\cos^2 n}{16\sin^2 n}=\frac{h^2\cot^2 n}{16}.$$

PROPOSITION X.

Théorème.

Avec les mêmes arcs, si l'on pose

$$h : d :: l\sin(n+h)-l\sin n : z,$$

z *sera* $<l\sin(n+d)-l\sin n$, *et la différence sera*

$$<\frac{h^2}{4}\left(\frac{1}{\sin n}+\frac{\cot^2 n}{4}\right).$$

En vertu de pr. 8, nommant α une quantité $<\frac{h^2}{2}$, on peut écrire

$$\sin(n+d)-\sin n=\frac{d}{h}[\sin(n+h)-\sin n]+\alpha.$$

D'un autre côté, nommant β une quantité $<\frac{h^2\cot^2 n}{16}$, on a (p. 9) $\quad l.\sin(n+d)-l.\sin n=$

$$[l.\sin(n+h)-l.\sin n].\frac{\sin(n+d)-\sin n}{\sin(n+h)-\sin n}+\beta;$$

d'où $l.\,sin\,(n+d) - l.\,sin\,n$

$$=\beta+\frac{\{l.\,sin\,(n+h)-l.\,sin\,n\}}{sin\,(n+h)-sin\,n}\left\{\frac{d}{h}(sin\,(n+h)-sin\,n)+\alpha\right\}$$

$$=\frac{d}{h}\{l.\,sin(n+h)-l.\,sin\,n\}+\alpha.\frac{l.\,sin(n+h)-l.\,sin\,n}{sin\,(n+h)-sin\,n}+\beta.$$

Ainsi, en prenant z, on commet une erreur $>o$, et

$$=\beta+\alpha.\frac{l.\,sin\,(n+h)-l.\,sin\,n}{sin\,(n+h)-sin\,n}.$$ Je la nomme θ.

Le facteur $l.\,sin\,(n+h)-l.\,sin\,n=l.\,\frac{sin\,(n+h)}{sin\,n}=$ $l.\left[1+\frac{sin\,(n+h)-sin\,n}{sin\,n}\right]$, ce qui est $<\frac{sin\,(n+h)-sin\,n}{2\,sin\,n}$ (*Alg.*)

Donc $\theta<\beta+\frac{\alpha.}{2\,sin\,n}<\frac{h^2cot^2n}{16}+\frac{h}{4\,sin\,n}=\frac{h^2}{4}\left(\frac{1}{sin\,n}+\frac{cot^2\,n}{4}\right).$

Voici les valeurs de θ, calculées en plus.

TABLEAU *A*.

Limites de θ.

1° Depuis 10″ jusqu'à 5° (h=1″).

10″	0,0006248	6′	0,0000005
15″	2781	7′	4
20″	1565	8′	3
30″	696	9′	22
40″	392	10′	2
50″	251	20′	05
1′	174	30′	03
2′	45	1°	0052
3′	20	1° 30′	0024
4′	11	2°	0014
5′	7		

2° Depuis 5° jusqu'à 90° ($h=10''$).

5°	0,00000003	45°	0,000000001
9°	1	54°	009
18°	04	63°	008
27°	02	72°	007
36°	013	81° à 90°	006

Ainsi, de 10″ à 15″, $\theta < 0,0006248$.
de 15″ à 20″, $\theta < 0,0002781$.

Dans ce tableau donc et les suivants, le nombre de la seconde colonne répond à celui de la première et à tous ceux qui le suivent, jusqu'à la ligne inférieure ; de sorte que pour tous les arcs, depuis 10″ jusqu'à 15″, la limite de θ est 0,0006248.

Limite de l'erreur qui affecte le log. sinus d'un arc donné.

1° Si l'arc est dans les tables, la limite de l'erreur est $5:10^8$. Pour avoir le l. sinus en plus, il faut augmenter celui des tables de $5:10^8$, etc.

2° Si l'arc n'est pas dans les tables, soient n, $n+10''$ les deux arcs tabulaires qui le comprennent, $n+d$ cet arc lui-même, l le $l.\sin n$ pris dans les tables, Δ la différence tabulaire.

Soit encore $l+e$ la valeur rigoureuse de $l.\sin n$, $l+\Delta+e'$ celle de $l.\sin(n+10'')$; la différence exacte est $\Delta+e'-e$. Faisons la proportion

$$10'':d::\Delta+e'-e:x=d.\frac{\Delta+e'-e}{10}.$$

Nous aurons en toute rigueur

$$l.\sin(n+d)=l+e+d.\frac{\Delta+e'-e}{10}+\theta. \qquad (1)$$

Soit $\frac{d\Delta}{10}=a+e''$, a étant la partie qu'on ajoute à l; on a

$$l.sin(n+d)=l+a+e+d.\frac{e'-e}{10}+\theta,$$

$$=l+a+\frac{e(10-d)}{10}+\frac{de'}{10}+\theta+e''.$$

On prend $l+a$ pour $l.sin(n+d)$; donc, nommant E l'erreur, on a $E=e\frac{10-d}{10}+\frac{e'd}{10}+\theta+e''$.

Mettant pour e, e' leur maximum $\frac{5}{10^8}$, nommant e_1 le module de e''; on a, vu que $d<10$,

$$E<\frac{5}{10^8}+\theta+e_1.$$

Le maximum de e_1 est aussi $\frac{5}{10^8}$; du reste e_1 est connu dans chaque cas, mais le signe de E ou le sens de l'approximation ne l'est pas. De plus, toutes les fois que θ, ajouté au module de e'', donne une somme $<5:10^8$, l'erreur est $<1:10^7$.

Même résultat pour la partie de la table où les arcs croissent par secondes.

Limite de l'erreur qui affecte l'arc dont le log. sinus est donné.

Soit $l+b$ le $l.sin$ donné; l, $l+\Delta$ les $l.sin$ tabulaires qui le comprennent; n, $n+10''$ les arcs correspondants; $l+e$, $l+\Delta+e'$ les valeurs rigoureuses de $l.sin\,n$, $l.sin(n+10'')$, $n+d$ l'arc qui répond à $l+b$. On a trouvé (1)

$$l.sin(n+d) \text{ ou } l+b=l+e+d.\frac{\Delta+e'-e}{10}+\theta,$$

d'où $$b=e+d.\frac{\Delta+e'-e}{10}+\theta;$$

puis $$\frac{d}{10}=\frac{b-e-\theta}{\Delta+e'-e}. \qquad (2)$$

Mais $\frac{d}{10}<1$; donc la fraction, valeur de $\frac{d}{10}$, augmente si à chacun de ses termes on ajoute un même nombre ; mettant donc pour $-e$ son maximum $5:10^8$, on a

$$\frac{d}{10}<\frac{b+\frac{5}{10^8}-\theta}{\Delta+e'+\frac{5}{10^8}}<\frac{b+\frac{5}{10^8}-\theta}{\Delta},$$

vu que $$e'\geqq-\frac{5}{10^8},$$

ou encore $$d<\frac{b+\frac{5}{10^8}+\theta}{\Delta}.10. \qquad (3)$$

La valeur (2) donne de même

$$d>\frac{b-\frac{5}{10^8}+\theta}{\Delta+e'-\frac{5}{10^8}}.10>\frac{b-\frac{5}{10^8}-\theta}{\Delta}.10. \qquad (4)$$

Or, soit $\frac{10b}{\Delta}=q+\varepsilon$, ε étant la partie négligée ; d'après la règle connue, on prend $d=q$; donc la limite de l'erreur, en plus et en moins, est

$$\frac{\frac{5}{10^8}+\theta}{\Delta}.10+\varepsilon_1,$$ ε_1 étant le module de ε.

Pour la partie de la table où les arcs croissent par secondes, c'est $\left(\frac{5}{10^8}+\theta\right):\Delta$.

TABLEAU *B*.

Limites de $\left(\frac{5}{10^8}+\theta\right):\Delta$.

10″	0″,024	3′	0″,0012
15″	14	4′	8
20″	11	1°, 30′	9
30″	6	2°	13
40″	5	3°	18
2′	2	4°	22

Limites de $\left(\frac{5}{10^8}+\theta\right)10:\Delta$.

5°	0″,006	63°	0″,08
9°	10	72°	0 ,15
21°	14	81°	32
27°	18	86°	34
36°	25	87°	73
45°	34	88° à 88° 30′	1,02
54°	50		

Deux observations sont à faire ici :

1° Dans la première partie de ce tableau, on remarque un décroissement rapide qui s'arrête à 1° 30′, où il se change en accroissement. C'est qu'à partir de 10′, le numérateur de la formule change peu, tandis que Δ diminue toujours.

2° A partir de 88°, les secondes deviennent incertaines, et au delà de 88° 59′, les dizaines de secondes le sont. Ainsi, pour les angles à calculer par leurs sinus, il faut éviter de s'approcher de 90°, tandis que d'après le tableau A, pour les sinus à calculer par les angles, il faut s'éloigner de 0°.

Enfin, on n'oubliera pas d'ajouter à ces limites le module de ε.

Pour les tangentes, on a

$$l.tg\,a = 10 + l.sin\,a - l.cos\,a,$$
$$= 10 + l.sin\,a - l.sin\,(90 - a).$$

Soit θ l'erreur de *l.sin a*, θ' celle de *l.sin*$(90-a)$, η celle de *l.tg a*; on a $\eta = \theta - \theta'$

Le module de η sera moindre que la plus grande des deux quantités θ, θ'. D'après cela, de 0° à 45° on prendra pour limites de η, celles de θ dans le tableau A. Au delà de 45°, il faudra rebrousser chemin; ainsi on a le

TABLEAU *C*.

Limites de η.

Depuis 0° jusqu'à 45°, celles du tableau (*a*).

De 45° à 90°, les suivantes.

45°	0,000.0000.013	89°50′	0,0000700
54°	.02	. . 55′	1100
63°	.04	. . 56′	2000
72°	.1	. . 57′	4500
81°	.3	. . 58′	17400
85°	1.4	. . 59′	25100
88°	2.4	. . . . 10″	39200
88° 30′	5.2	. . . . 20″	69600
89°	30.	. . . . 30″	156500
89° 30′	200.	. . . . 40″ à 50″..	0,0624800

On voit que le l. tg est d'autant moins exact, que l'angle est plus près de 90°.

Limites de l'erreur du l.tg *d'un arc donné.*

Prenez celles du *l.sin*, en remplaçant θ par η.

Limites de l'erreur de l'arc dont le l.tg. *est donné.*

L'expression est

$$\frac{\frac{5}{10^8}+\eta}{\Delta'}+\varepsilon_1 \quad \text{de } 0^\circ \text{ à } 5^\circ,$$

et

$$\frac{\frac{5}{10^8}+\eta}{\Delta'}.10+\varepsilon_1 \text{ de } 5^\circ \text{ à } 90^\circ.$$

Δ' est la différence tabulaire, ε_1 comme plus haut. Or, de 0 à 5°, Δ' est égal, ou de peu supérieur à Δ. Ainsi pour le

TABLEAU *D*,

De 0° à 5° on peut prendre la partie correspondante du tableau B.

Limites de $\left(\frac{5}{10^8}+\eta\right).10:\Delta'$.

5°	0″,006	89° 50′	0″,2
9°	10	. . 55′	15
25° 36′	13	. . 56′	25
81°	14	. . 59′	80
85°	12	. . 59′ 10″	1″,
88°	10	. . . . 20″	2″,
88° 30′	40	. . . . 30″	6″,
89°	180		
89° 30′	300		

Au delà les dizaines de secondes deviennent incertaines.

Remarquez que si, dans ce tableau, l'intervalle des arcs était partout de 10″, il y aurait plus de régularité. Nous voyons encore ici que l'arc est d'autant plus incertain qu'il est plus près de 90°, et que le l.tg l'est d'autant plus que l'arc est plus près de 0. *On a le plus de chances d'exactitude vers 60°, ici comme pour les sinus.*

§ 2. RÉSOLUTION DES Δ.

PROPOSITION XI.

THÉORÈME. — FIG. 11.

Dans tout Δ rectangle, chaque côté de l'∧ droit est égal à l'hypothénuse multipliée par le sinus de l'angle opposé à ce côté.

Soit ABC le Δ, A l'angle droit. Du point B comme centre, avec le rayon arbitraire BC', décrivez l'arc C'D, mesure de l'angle B : menez C'A', sinus de l'arc C'D ; il vient :

$$\frac{A'C'}{BC'} \text{ ou } \frac{\sin B}{r} = \frac{AC}{BC}, \text{ d'où } AC = BC.\sin B,$$

r étant pris pour unité.

Nous indiquerons dorénavant les côtés par les lettres placées aux ∧ opposés, mais en prenant pour les côtés de petites lettres. Ici donc $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$.

Par suite $$b = a \sin B. \qquad (1)$$

Corollaire. On a de même

$$c = a \sin C;$$

comme $B = 90° - C$, et que $C = 90° - B$, il s'ensuit qu'on a aussi

$$b = a \sin(90 - C) = a \cos C, \qquad (2)$$

$$c = a \sin(90° - B) = a \cos B,$$

c'est-à-dire que *dans tout Δ rectangle chaque côté de l'∧ droit est égal à l'hypothénuse multipliée par le cosinus de l'∧ adjacent à ce côté*, ce qu'on peut déduire de la figure.

Si l'on divise la formule (1) par (2), il vient

$$\frac{b}{c} = \frac{\sin B}{\cos B} = tg\, B,$$

d'où $$b = c\; tg\; B.$$

Ainsi *dans tout Δ rectangle chaque côté de l'∧ droit est égal à l'autre, multiplié par la tangente de l'∧ opposé au premier côté,* ce que la figure prouve aussi.

Remarque. Nous avons ainsi les formules.

$$\left.\begin{array}{l} b=a \sin \text{B},\ c=a \sin \text{C},\ b=a \cos \text{C}, \\ c=a \cos \text{B},\ b=c\,tg\ \text{B},\ c=b\ tg\ \text{C}, \\ \text{et enfin}\quad a^2=b^2+c^2. \end{array}\right\} \quad (\alpha)$$

Ces formules suffisent pour résoudre tous les cas du Δ rectangle.

En effet, ce Δ renferme les cinq éléments a, b, c, B, C. Connaissant deux de ces éléments, pourvu que l'un au moins des éléments connus soit un côté, on doit pouvoir déterminer les trois autres. Ainsi, il faut connaître des relations entre ces éléments pris trois à trois : le nombre de ces relations est $\frac{5.4.3}{1.2.3}=10$; mais il faut en exclure celles qui renfermeraient les ∧ B, C avec l'un des trois côtés a,b,c. Car de pareilles relations seraient propres, soit à déterminer un côté en fonction des deux ∧ B, C, ce qui est impossible, ou à déterminer l'un des ∧ B, C en fonction d'un côté et de l'autre angle, ce qui n'a pas lieu, puisque la relation $90°=\text{B}+\text{C}$ détermine l'un des ∧ lorsque l'autre est connu. Des dix relations il n'y en a donc que sept qui existent, et nous les avons dans les formules (α).

PROPOSITION XII.

THÉORÈME. — FIG. 12.

Dans tout Δ les sinus des ∧ sont entre eux comme les côtés opposés.

Soit ABC le Δ : de l'un des sommets, A, menez AD perpendiculaire sur le côté opposé BC. Si AD tombe dans le Δ à cause du Δ rectangle ABD, on aura (p. 11),

$$\sin B = \frac{AD}{AB} = \frac{AD}{c}.$$

De même dans le Δ ADC

$$\sin C = \frac{AD}{AC} = \frac{AD}{b};$$

d'où, divisant, $\frac{\sin B}{\sin C} = \frac{b}{c}$;

ou encore $\frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B}$, et de même $= \frac{a}{\sin A}$.

FIG. 13. Si la perpendiculaire AD tombe hors du Δ, le Δ rectangle ACD donne

$$AD = AC.\ \sin ACD;$$

mais l'∧ ACD est le supplément de ACB ou C : donc $\sin ACD = \sin C$, et $AD = b \sin C$; d'ailleurs $AD = c \sin B$, encore, etc.

PROPOSITION XIII.

THÉORÈME. — FIG. 12.

Dans tout Δ le carré d'un côté est égal à la somme des carrés des deux autres, moins le double produit de ces derniers côtés, multiplié par le cosinus de l'∧ compris, c'est-à-dire que

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

En effet, soit ABC le Δ ; d'un sommet A menez AD perpendiculaire sur le côté opposé BC ; si AD tombe dans le Δ, on a

$$a \text{ ou } BC = BD + DC.$$

Mais les Δ rectangles donnent (p. 11, c.)

$$BD = c \cos B, \quad DC = b \cos C,$$

donc (1) $a = c \cos B + b \cos C.$

Fig. 13. Si la perpendiculaire AD tombe hors du Δ, on a

$$a = BD - DC.$$

Ici encore $BD = c \cos B$, mais $DC = b \cos ACD$; or, l'$\wedge$ACD, supplément de ACB ou C, donne $\cos ACD = -c \cos C$; donc $DC = -b \cos C$, et l'on a encore $a = c \cos B + b \cos C$. Changeant b en a, B en A, et réciproquement, (1) donne

(2) $$b = c \cos A + a \cos C.$$

Changeant ici C en B, c en b, et réciproquement, on a

(3) $$c = b \cos A + a \cos B.$$

Actuellement, si, après avoir multiplié (1) par a, (2) par b, (3) par c, on retranche de la première la somme des deux dernières, il vient

$$a^2 - b^2 - c^2 = -2bc \cos A,$$

d'où (4) $$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

Ce qu'il fallait prouver.

Remarque. Cette formule (4), par des permutations de lettres, donne immédiatement

(5) $$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B,$$

(6) $$c^2 = b^2 + a^2 - 2ab \cos C.$$

Ces trois formules, fournissant trois relations entre les six éléments a, b, c, A, B, C, doivent à elles seules suffire pour résoudre tous les cas du Δ, puisque trois de ces éléments étant donnés, on aura trois équations pour trouver les trois autres. Ces mêmes formules doivent donc renfermer les relations démontrées pr. 12.

En effet (4) donne $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$,

d'où

$$\sin^2 A = 1 - \cos^2 A = 1 - \frac{(b^2 + c^2 - a^2)^2}{4b^2c^2} = \frac{4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{4b^2c^2}.$$

Le numérateur étant la différence de deux carrés, se décompose en facteurs : ainsi

$$\sin^2 A = \frac{(2bc+b^2+c^2-a^2)(2bc-b^2-c^2+a^2)}{4b^2c^2}.$$

Le premier facteur $2bc+b^2+c^2-a^2$ est égal à $(b+c)^2 - a^2$; le second à $a^2-(b-c)^2$; chacun de ces facteurs se décompose d'après le même principe, de sorte que

$$(7) \quad \sin^2 A = \frac{(b+c+a)(b+c-a)(a-b+c)(a+b-c)}{4b^2c^2}.$$

Actuellement, on reconnaît que le numérateur ne change pas si l'on change a en b et réciproquement, ou a en c et réciproquement; mais si l'on divise de part et d'autre par a^2, le dénominateur devient aussi une fonction symétrique de a, b, c; donc $\frac{\sin^2 A}{a^2}$ et par suite $\frac{\sin A}{a}$, est également une fonction symétrique de a, b, c, c'est-à-dire que la valeur de $\frac{\sin A}{a}$ ne change pas si l'on y change les a en b, ou en c;

donc $$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}.$$

Remarque 2. Les formules (4), (5), (6), ou bien (1), (2), (3), laissent a, b, c indéterminés si l'on se donne les trois $\wedge$ A, B, C. Eliminons c entre (3) et (2), et pour cela multiplions (3) par $\cos A$ et ajoutons à (2); il vient

$$b = b\cos^2 A + a(\cos C + \cos A \cos B);$$

transposant $b\cos^2 A$, et, remarquant que $b - b\cos^2 A = b(1-\cos^2 A) = b\sin^2 A$, on a

$$a(\cos C + \cos A \cos B) - b\sin^2 A = o. \quad (8)$$

Cette équation (8) remplace (2).

Pour éliminer c entre (3) et (1), il ne s'agit que de permuter a et b dans (8), ce qui donne

$$a\sin^2 B - b(\cos C + \cos A \cos B) = o, \quad (9)$$

équation qui remplace (1).

Enfin entre (8) et (9) éliminons b; il vient

$$a\left[(\cos C+\cos A \cos B)^2-\sin^2 A \sin^2 B\right]=o. \qquad (10)$$

Or, je dis que le coefficient de a est nul, car $A+B+C=180°$, d'où

$$\cos C=-\cos(A+B)=-\cos A \cos B+\sin A \sin B,$$

puis $\cos C+\cos A \cos B=\sin A \sin B$;

et l'équation (10) devient $a\times o=o$. Il y a donc indétermination. (*V. l'alg.*)

PROPOSITION XIV.

Problème.

Résoudre un Δ *rectangle, connaissant l'hypothénuse* a *et un côté de l'angle droit* b.

Le second côté de l'angle droit c est donné par la relation,

$$c^2=a^2-b^2=(a-b)(a+b),$$

en logarithmes $\log c=\frac{1}{2}[\log(a-b)+\log(a+b)]$.

L'angle B se trouve par $a \sin B=b$;

rétablissant le rayon (l. 1, pr. 8) $a \sin B=br$,

d'où $\log \sin B=10+\log b-\log a$;

car dans les tables $r=10^{10}$. D'ailleurs $C=90°-B$.

PROPOSITION XV.

Problème.

Résoudre un Δ *rectangle, connaissant* b, c.

On a $tg\, B=\frac{b}{c}$; rétablissant le rayon

$$tg\,B=\frac{br}{c},\ \text{d'où}\ \log tg\,B=10+\log b-\log c.$$

$$C=90°-B.$$

Pour avoir l'hypothénuse, on pourrait se servir de la relation $a=\sqrt{b^2+c^2}$. Mais il est plus commode d'employer la formule $a\ \sin B=br$, d'où

$$\log a=10+\log b-\log \sin B.$$

PROPOSITION XVI.

Problème.

Résoudre un Δ rectangle, connaissant l'hypothénuse a, *et un angle aigu* B.

On a $C=90°-B.$

La formule $a \sin B=br$ donne $b=\frac{a \sin B}{r}$,

d'où $\log b=\log a+\log \sin B-10;$

de même $\log c=\log a+\log \sin C-10,$

ou $=\log a+\log \cos B-10.$

PROPOSITION XVII.

Problème.

Résoudre un Δ rectangle, connaissant un côté de l'angle droit b, *et un angle aigu* B.

On a $C=90°-B.$

L'hypothénuse est donnée par $a=\frac{br}{\sin B}$,

d'où $\log a=10+\log b-\log \sin B,$

le côté c par $b=c\,tg\,B$ ou $br=c\,tg\,B,$

d'où $\log c=10+\log b-\log tg\,B.$

Remarque. Les quatre problèmes précédents renferment tous les cas que présente le Δ rectangle. En effet, puisque parmi les données il faut qu'il y ait au moins un côté, on peut se donner ou deux côtés, ou un côté et un ∧. Si l'on se donne deux côtés, il y a deux cas, selon qu'on se donne soit l'hypothénuse avec un côté de l'∧ droit, soit les deux côtés de l'∧ droit. Que si l'on se donne un côté et un ∧, comme cet ∧ fait connaître l'autre, il n'y a encore que deux cas, selon que le côté donné est l'hypothénuse ou non. Ce sont les quatre cas traités.

PROPOSITION XVIII.

Problème.

Dans un Δ quelconque on connaît un côté a *et deux* ∧, *trouver les autres éléments.*

Quels que soient les ∧ donnés, on trouvera le troisième par la relation $A+B+C=180°$.

Quant aux côtés b, c, on a (p. 12)

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C},$$

d'où $$b=\frac{a \sin B}{\sin A}, \qquad c=\frac{a \sin C}{\sin A}.$$

Le rétablissement du rayon ne modifie pas ces formules. Elles donnent

$$\log b=\log a+\log \sin B-\log \sin A=$$

$$\log a+\log \sin B+\text{comp.} \log \sin A-10,$$

$$\log c=\log a+\log \sin C-\log \sin A=, \text{ etc.}$$

PROPOSITION XIX.

Problème.

Connaissant deux côtés a, b, *et l'angle* A *opposé à l'un d'eux, trouver le côté c et les deux autres* ∧.

On aura l'∧ B par la formule

$$a : \sin A :: b : \sin B, \text{ d'où } \sin B = \frac{b \sin A}{a},$$

et $$\log \sin B = \log b + \log \sin A - \log a,$$

L'∧ C est égal à $180° - (A+B)$;

Quant au côté c, on a $\sin A : \sin C :: a : c = \frac{a \sin C}{\sin A}$,

ou $$\log c = \log a + \log \sin C - \log \sin A.$$

Comme l'∧ B est donné par son sinus, le problème n'est possible qu'autant que ce sinus n'est pas plus grand que le rayon. Il faut donc que

$$\frac{b \sin A}{a} \leq 1, \text{ d'où } a \geq b \sin A.$$

Or, si a est $\geqq b$, il est aussi $> b \sin A$, et le Δ est possible, ce qu'on sait par la géométrie (*Géom.*, I. 2).

Fig. 14. Mais si $a < b$, il peut se faire que a soit aussi $< b \sin A$, et le Δ est impossible : si du sommet C on abaisse CD perpendiculaire sur AB, on trouve CD = AC. $\sin A = b \sin A$: il faut donc que $a \geq$ CD, c'est-à-dire que le côté BC ne soit pas moindre que la perpendiculaire CD. Tous ces résultats sont connus.

A un sinus donné répondent toujours deux ∧ supplémentaires l'un de l'autre : ainsi l'∧ B, s'il n'est pas droit, a deux valeurs, l'une $< 90°$, l'autre $> 90°$. Dans le cas où $a \geqq b$, l'∧ A doit aussi être $\geqq$ B; donc B ne saurait être obtus, et c'est la première valeur qui convient. Mais si $a < b$, l'∧ B peut être obtus, et le Δ, supposé possible, admet deux solutions, excepté toujours le cas où B est droit.

Considérant le cas où le Δ admet deux solutions, nommons m l'une des valeurs de B, l'autre sera $180-m$; on a donc aussi deux valeurs pour C, savoir :

$$C=180-(A+m),$$
$$C=180-(A+180-m)=m-A.$$

On aura aussi deux valeurs pour c, savoir :

$$c=\frac{a \sin[180-(A+m)]}{\sin A}=\frac{a \sin(m+A)}{\sin A},$$

$$c=\frac{a \sin(m-A)}{\sin A},$$

ou $$c=\frac{a \sin(m\pm A)}{\sin A}.$$

La formule (4), pr. 13, peut aussi servir à calculer c; elle donne

$$(\alpha) \qquad c^2-2bc\cos A+b^2-a^2=o,$$

d'où $$c=b\cos A\pm\sqrt{b^2\cos^2 A-b^2+a^2};$$

mais $$b^2\cos^2 A-b^2=-b^2(1-\cos^2 A)=-b^2\sin^2 A,$$

donc $$c=b\cos A\pm\sqrt{a^2-b^2\sin^2 A}.$$

Pour que ces valeurs de c soient réelles, il faut que $a^2 > b^2\sin^2 A$, comme ci-dessus; pour qu'elles fournissent deux solutions, il faut de plus qu'elles soient positives : l'équation (α) montre que la condition nécessaire et suffisante pour cela est $b^2-a^2>o$, ou $a<b$, ce qui est d'accord avec la discussion développée plus haut.

La valeur de c, qu'on vient de trouver, est peu commode pour le calcul logarithmique : en effet, pour la mettre en nombres, il faut chercher les *log* de a, b, $\sin A$; doubler $\log a$, et chercher le nombre correspondant, qui sera a^2; ajouter $\log b$ et $\log \sin A$, doubler la somme, ce qui donne $\log b^2\sin^2 A$, et chercher le nombre correspondant, qui sera $b^2\sin^2 A$; retrancher $b^2\sin^2 A$ de a^2, prendre le logarithme du reste, le

sous-doubler à cause de la racine, chercher le nombre correspondant, et l'on aura la valeur du radical. Reste encore à prendre le *log cos* A, pour l'ajouter à *log b*, chercher le nombre correspondant, qui est *b cos* A. Dans tout cela il y a, de compte fait, 9 opérations logarithmiques, et 8 additions, soustractions, multiplications par 2 et par $\frac{1}{2}$, si l'on compte les opérations indiquées par $\pm$. On peut réduire le premier de ces deux systèmes d'opérations à 8, le second à 7, en décomposant $a^2-b^2\sin^2 A$ en $(a+b\sin A)(a-b\sin A)$. Mais au moyen d'un angle *auxiliaire*, et des transformations trigonométriques, on peut d'abord réduire les deux termes $a^2-b^2\sin^2 A$ à un seul. On a

$$a^2-b^2\sin^2 A=a^2\left(1-\frac{b^2\sin^2 A}{a^2}\right). \qquad (\beta)$$

Or $\frac{b\sin A}{a}$ est $=\sin B$. Nommons encore m la plus petite valeur de B ;

il vient

$$a^2-b^2\sin^2 A=a^2(1-\sin^2 m)=a^2\cos^2 m.$$

Donc $$c=b\cos A\pm a\cos m.$$

La relation (β) donne $b=\frac{a\sin m}{\sin A}$; substituant dans l'expression de c, on a

$$c=\frac{a\sin m\cos A}{\sin A}\pm a\cos m=a\frac{\sin m\cos A\pm\cos m\sin A}{\sin A}$$

$$=\frac{a\sin(m\pm A)}{\sin A}, \text{ comme plus haut.}$$

Pour calculer c par cette formule, il faut d'abord calculer m, ce qui exige quatre opérations logarithmiques et une

addition. Les deux valeurs de c exigent trois nouvelles opérations logarithmiques et trois additions ou soustractions. Il y a donc avantage.

N'oublions pas que toutes les fois qu'on diminue le nombre des opérations logarithmiques, non-seulement on abrége les calculs, mais encore on diminue les chances d'erreurs, vu que chaque logarithme comporte une erreur.

PROPOSITION XX.

Problème.

Dans un Δ *on connaît deux côtés* a, b, *et l'*∧ *compris* C : *trouver* c, A, B.

On a, entre ces inconnues A et B, les relations

$$A+B+C=180, \text{ et } \sin A : \sin B :: a : b.$$

D'après la première on connaît

$$A+B=180-C.$$

Si l'on connaissait A—B, les ∧ A et B seraient faciles à trouver.

Posons donc $\qquad A-B=2x.$

De là $\quad A=90-\frac{1}{2}C+x, \; B=90-\frac{1}{2}C-x.$

Si dans $\qquad \sin A : \sin B :: a : b$

on substitue les valeurs de A et B, et qu'on fasse pour un instant $C=2C'$, on a l'équation à une inconnue

$$\cos(C'-x) : \cos(C'+x) :: a : b;$$

développant $\quad (\cos C' \cos x+\sin C' \sin x).b=$

$$(\cos C' \cos x-\sin C' \sin x)a,$$

d'où $\quad (a+b)\sin x . \sin C' = \cos C' \cos x (a-b),$

puis $$tg\, x = \frac{a-b}{a+b}.\ cot.\ C'. \qquad (1)$$

Cette formule peut se trouver d'une autre manière. On a

$$sin\, A : sin\, B :: a : b,$$

d'où $$sin A + sin B : sin A - sin A :: a+b : a-b.$$

Mais la formule (10) pr. 20, l. 1, si l'on y remplace p par A et q par B, donne

$$sin A + sin B : sin A - sin B :: tg\frac{1}{2}(A+B) : tg\frac{1}{2}(A-B).$$

Ces deux dernières proportions ont un rapport commun : on en déduit donc

$$a+b : a-b :: tg\frac{1}{2}(A+B) : tg\frac{1}{2}(A-B).$$

D'où $$tg\frac{1}{2}(A-B) = \frac{a-b}{a+b}\, tg\frac{1}{2}(A+B). \qquad (2)$$

Or, $\frac{1}{2}(A-B)$ n'est autre chose que x, et comme $A+B = 180 - C$, on a $\frac{1}{2}(A+B) = 90 - \frac{1}{2}C$, et $tg\frac{1}{2}(A+B) = cot\frac{1}{2}C = cot\, C'$. La formule (2) est donc la même que (1).

Reste à trouver c, ce qui peut se faire par la formule $c = \frac{a\, sin\, C}{sin\, A}$; mais comme elle exige trois nouveaux logarithmes, on en donnera une autre.

Des proportions $sin A : sin B : sin C :: a : b : c$

on tire $$sin A + sin B : sin C :: a+b : c,$$

d'où $$c = \frac{(a+b)\, sin\, C}{sin A + sin B}.$$

Or, d'après la formule (5), pr. 20, l. 1, on a

$$\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{1}{2}(A+B) \cos \frac{1}{2}(A-B),$$

$$= 2 \cos \frac{1}{2} C . \cos \frac{1}{2}(A-B),$$

puisque $\frac{1}{2}(A+B) = 90 - \frac{1}{2} C$.

D'ailleurs $\sin C = 2 \sin \frac{1}{2} C \cos \frac{1}{2} C$; la valeur de c devient donc

$$(3) \qquad c = \frac{(a+b) \sin \frac{1}{2} C}{\cos \frac{1}{2}(A-B)},$$

et comme on a déjà dû calculer $\log (a+b)$, il ne reste plus que deux nouveaux logarithmes à chercher.

La formule (6), pr. 13, donne aussi c en fonction de a, b, C ; mais pour l'approprier au calcul logarithmique, il faudra y introduire un $\wedge$ auxiliaire ; elle ne sera donc pas plus directe que (3).

PROPOSITION XXI.

PROBLÈME.

Connaissant les trois côtés d'un Δ, *trouver les* $\wedge$.

Les formules (4), (5), (6), pr. 13, donnent les $\wedge$; car (4) donne

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Pour mettre cette formule en logarithmes, il faudrait chercher les logarithmes de a, b, c ; les doubler, chercher les nombres correspondants, qui seront les valeurs de b^2.

c^2, a^2; faire l'opération $b^2+c^2-a^2$, chercher le logarithme de ce résultat, en retrancher $\log 2+\log b+\log c$, et l'on aurait $\log \cos A$: enfin chercher l'arc correspondant A : total 8 opérations de logarithmes, 7 additions, soustractions ou multiplications par 2. Si l'on voulait calculer les trois $\wedge$, on aurait encore 4 nouvelles opérations de logarithmes, et 6 additions ou soustractions.

Pour réduire le nombre de ces opérations, on va chercher $\cos\frac{1}{2}A$, $\sin\frac{1}{2}A$, d'où l'on conclura $tg\frac{1}{2}A$.

On a (l. 1, p. 13)

$$\sin^2\frac{1}{2}A=\frac{1-\cos A}{2}=\frac{1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}=$$

$$=\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{4bc}=\frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}=\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4bc}.$$

Posons $\qquad a+b+c=2p;$

retranchant $2c$... $a+b-c=2p-2c=2(p-c)$.

De même $\qquad a-b+c=2(p-b)$.

Donc $\quad \sin^2\frac{1}{2}A=\frac{2(p-c)\,2(p-b)}{4bc}=\frac{(p-c)(p-b)}{bc}$

et $\qquad \sin\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$.

Pour avoir $\cos\frac{1}{2}A$, on prend la formule (l. 1, p. 13)

$$\cos^2\frac{1}{2}A=\frac{1+\cos A}{2}=\frac{1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}=\frac{(b+c)^2-a^2}{4bc}$$

$$=\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{4bc}=\frac{p(p-a)}{bc}.$$

Donc $$cos\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}.$$

De là $$tg\frac{1}{2}A=\frac{sin\frac{1}{2}A}{cos\frac{1}{2}A}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}.$$

Avec cette formule il y a à chercher les logarithmes de p, $p-a$, $p-b$, $p-c$, à ajouter aux deux derniers les compléments arithmétiques des deux autres, pour doubler, prendre l'arc et le doubler : ainsi 5 opérations logarithmiques et 3 autres ; il est vrai qu'il faut calculer $2p$, p, $p-a$, $p-b$, $p-c$, ce qui fait encore 5 additions ou soustractions. Pour avoir B et C, il n'y a plus que deux opérations : car $l.tg\frac{1}{2}B$, $l.tg\frac{1}{2}C$ renferment les mêmes logarithmes que $l.tg\frac{1}{2}A$. Mais il y a encore 6 additions ou divisions par 2. Donc 7 opérations de logarithmes, et 14 additions, soustractions ou divisions par 2. Le calcul des $\wedge$ par le moyen de $cos\,A$, $cos\,B$, $cos\,C$, exigeait 12 opérations de logarithmes et 13 autres.

La transformation de $a+b+c$ en $2p$ simplifie aussi : car pour $tg\frac{1}{2}A$, par exemple, il aurait fallu calculer $a+b+c$, $a+b-c$, $a+c-b$, $b+c-a$, ce qui fait 4 additions et 3 soustractions, c'est-à-dire 7 opérations au lieu des 5 qu'on a indiquées plus haut.

On reconnaîtra semblablement que l'emploi de $sin\frac{1}{2}A$ est le plus avantageux après $tg\frac{1}{2}A$; ensuite vient $cos\frac{1}{2}A$, enfin $cos\,A$.

Pour appliquer les tables au calcul de $tang \frac{1}{2} A$, il faut rétablir le rayon, ce qui donne

$$tang \frac{1}{2} A = r \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}},$$

d'où $$log\, tg \frac{1}{2} A$$

$$= 10 + \frac{1}{2}[log(p-b) + log(p-c) - log\, p - log(p-a)]$$

$$= \frac{1}{2}[log(p-b) + log(p-c) + 10 - log\, p + 10 - log(p-a)]$$

$$= \frac{1}{2}[log(p-b) + log(p-c) + comp. log\, p + comp. log(p-a)]$$

***Remarque* 1.** Toutes les formules qui viennent d'être trouvées deviennent impossibles si le Δ l'est, et réciproquement.

Prenons d'abord $cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$.

Pour que l'$\wedge$ A soit réel, il faut et il suffit que le cosinus soit compris entre $+1$ et -1, c'est-à-dire que

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} < 1 \text{ et } > -1.$$

De là $b^2+c^2-a^2 < 2bc$ et $b^2+c^2-a^2 > -2bc$.

Transposant

$$b^2+c^2-2bc < a^2 \quad \text{et} \quad b^2+c^2+2bc > a^2$$

ou $$(b-c)^2 < a^2 \quad \text{et} \quad (b+c)^2 > a^2.$$

La première de ces inégalités exige que le côté a soit $>$ la valeur absolue de la différence des deux autres ; de sorte que si b n'est pas moindre que c, on doit avoir

$$a > b - c, \text{ d'où } a + c > b.$$

La seconde exige que $b+c>a$.

Ces conditions sont connues.

Réciproquement, si le Δ est impossible, A est imaginaire.

En effet, supposons $a>b+c$.

De là $(b+c)^2<a^2$

ou $b^2+c^2-a^2<-2bc$.

Donc $\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ ou $\cos A$ sera <-1.

Donc $\cos A$ tombant entre -1 et $-\infty$, A est imaginaire.

Si l'on suppose $b>a+c$,

on en tire $(b-c)>a$

$b^2+c^2-a^2>2bc$

et $\cos A$ sera >1.

On voit que les côtés qui comprennent l'$\wedge$ A ne jouent pas le même rôle que le côté opposé.

Discutons encore $tg\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$.

Pour que l'arc $\frac{1}{2}A$ soit réel, il faut et il suffit que la tangente le soit : ainsi il faut et il suffit que $\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}$ soit >0, et comme p est positif, ceci exige que les binomes $p-a$, $p-b$, $p-c$, soient positifs en nombre impair, et négatifs en nombre pair. Or, il est impossible qu'il y en ait plus d'un qui soit négatif, quels que soient les côtés a, b, c.

Car si l'on avait $p-a<0$

avec $p-b<0$,

on en déduirait par addition

$$2p-a-b<0,$$

ou, vu que $2p=a+b+c$,

$$c<0, \text{ ce qui est absurde.}$$

Ainsi il faut et il suffit que $p-a$, $p-b$, $p-c$, soient positifs tous les trois, c'est-à-dire que

$$p>a,\ p>b,\ p>c,$$

ou $2p>2a,\ 2p>2b,\ 2p>2c,$

ou encore $a+b+c>2a,\ a+b+c>2b,\ a+b+c>2c,$

ou enfin $b+c>a,\ a+c>b,\ a+b>c.$

Conditions connues.

Si l'on avait, par exemple,

$$a>b+c,$$

d'où $0>b+c-a,$

c'est-à-dire $0>p-a.$

Comme les deux autres binômes $p-b$, $p-c$ seront nécessairement positifs (puisqu'il est impossible qu'il y en ait plus d'un qui soit négatif), $tang\,\frac{1}{2}A$ serait imaginaire.

Remarque 2. On reconnaîtra, comme p. 16, que les quatre propositions précédentes renferment tous les cas du Δ obliquangle.

Remarque 3. Les valeurs de $sin\,\frac{1}{2}A$, $cos\,\frac{1}{2}A$ donnent

$$sin\,A=2\,sin\,\frac{1}{2}A\,cos\,\frac{1}{2}A=\frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{bc},$$ ce qui rentre dans la form. (7), p. 13.

PROPOSITION XXII.

PROBLÈME. — FIG. 14.

Trouver l'expression de la surface d'un Δ en fonction

de 3 des 6 éléments, pourvu que parmi les données il y ait un côté.

1° On a *surf.* $ACB=\frac{1}{2}AB\times DC=\frac{1}{2}c\times DC$.

Le Δ rectangle ACD donnant $DC=b\ sin\ A$; on aura

$$surf.\ ACB=\frac{1}{2}bc.\ sin\ A.$$

Voilà l'aire exprimée en fonction de deux côtés et de l'∧ compris.

2° Substituant pour *sin* A la valeur donnée p. 21, r. 3, il vient *surf.* $ACB=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ en fonction des trois côtés.

3° La relation $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ a déjà donné (p. 19)

$$c=b\cos A\pm\sqrt{a^2-b^2\sin^2 A},$$

donc *surf.* $ACB=\frac{1}{2}(b^2\sin A\cos A\pm b\sin A\sqrt{a^2-b^2\sin^2 A})$ en fonction des deux côtés et de l'∧ opposé à l'un de ces côtés.

4° On a $\sin B : \sin C :: b : c$, d'où $b=\frac{c\sin B}{\sin C}$, et comme $C=180-(B+A)$ ou $\sin C=\sin(B+A)$,

il vient $surf.\ ABC=\frac{c^2\sin A.\ \sin B}{2\sin(A+B)}$

en fonction d'un côté et des ∧ adjacents.

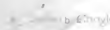
EXEMPLES DE LA RÉSOLUTION DES TRIANGLES RECTILIGNES.

Ex. 1. *Dans un Δ on connaît les côtés*

$a=5643^m,34$. $b=4928^m,56$. $c=4264^m,29$,

trouver les ∧.

On calcule d'abord



$$2p=a+b+c=14836,19,$$

d'où $$p=7418,095,$$

puis $p-a=1774,755, p-b=2489,535, p-c=3153,805.$

Pour vérification, il faut que $(p-a)+(p-b)+(p-c)$ soit égal à p.

Pour les $\triangle$, on a à chercher les logarithmes de p, $p-a$, $p-b$, $p-c$, et leurs compléments arithmétiques. Voici le tableau des Calculs :

CALCUL DE

A.		B.		C.	
$log\ p\ (p-b) =$	3,3961121 / 61	$log\ (p-a) =$	3,2491249 / 135	$log\ (p-a) =$	3,2491384
$log\ (p-c) =$	3,4988341 / 7	$log\ (p-c) =$	3,4988348	$log\ (p-b) =$	3,3961182
$c\ log\ (p-a) =$	6,7508616	$c\ log\ (p-b) =$	6,6038818	$c\ log\ (p-c) =$	6,5011652
$c\ log\ p =$	6,1297076	$c\ log\ p =$	6,1297076	$c\ log\ p =$	6,1297076
sommes	19,7755222		19,4815626		19,2761294
$l.\ tg \frac{1}{2} A =$	9,8877611	$l.\ tg \frac{1}{2} B =$	9,7407813	$l.\ tg \frac{1}{2} C =$	9,6380647

Pour $\frac{1}{2}$A, la table donne le *log tg*... 9,8877248, arc correspondant 37° 40′ 30″, différant du nôtre de 363, différence tabulaire 435 ; on fera donc la proportion

$$435 : 363 :: 10'' : x,$$

d'où $x=8'',35,$

puis $\frac{1}{2}A=37°\ 40'\ 20'',35$

et $A=75°\ 21'\ 16'',70$

puis $B=57°\ 40'\ 5'',66$

$C=46°\ 58'\ 37'',64$

d'où $A+B+C$

$=180°\ 0'\ 0''.$

Sur chacun des logarithmes et comp. logarithmes, l'erreur est $<\frac{1}{10^7}$; donc sur chaque log. tg. l'erreur est $<\frac{2}{10^7}$.

Cherchons d'abord l'arc correspondant à 9,8877609, limite inférieure de *log tg* $\frac{1}{2}$A.

D'après la table *l. tg* 37° 40′ 30″=9,8877248, différant du nôtre de 361; différence tabulaire 435; la proportion des différences donne $\frac{3610}{435}$, et comme l'arc tombe entre 25° et 81°, si l'on calcule cette fraction à 0,001, le tableau D, page 393, montre qu'on aura l'arc à moins de 0″,014. Or $\frac{3610}{435}$=8,299 retranchant 0,014, ou $n\frac{1}{2}A > 37°\,40'\,38'',285$.

La seconde limite de *log tg* $\frac{1}{2}$A est 9,8877613; différence 365; à calculer $\frac{3650}{435}$=8,390, ajoutant 0,014, on a

$$\frac{1}{2}A < 37°\,40'\,38'',404.$$

Donc	A>75°21′16″,57	et A<75°21′16″,808
On trouve de même	B>57°40′ 5″,556	<57°40′ 5″,770
	C>46°58′37″,542	<46°58′37″,738
De là	A+B+C>179°59′59″,668	et <180° 0′ 0″,316

Résultats satisfaisants.

Ex. 2. *Trouver* (fig. 25) *la hauteur* AB *d'un édifice placé sur un terrain horizontal.*

Dans ces sortes de questions on est conduit à mesurer des /\ déterminés par certains points du terrain. A cet effet, on emploie des instruments composés essentiellement d'un arc de cercle divisé en degrés et parties de degrés.

Le plan de cet arc peut prendre par rapport à l'horizon telle position qu'on veut : autour du centre se meuvent certaines pièces au moyen desquelles on peut diriger des rayons visuels vers tels points qu'on veut, situés dans le plan de l'arc de cercle; cet arc fait connaître la mesure de l'$\wedge$ que ces rayons interceptent.

Le plus exact de ces instruments est le *cercle répétiteur* qui donne les angles avec une précision presque mathématique : le *graphomètre* se compose d'un demi-cercle, etc.

Pour résoudre la question actuelle, on mesurera, à partir du pied B de l'édifice, une base BC qui ne soit ni très-petite, ni très-grande par rapport à AB, afin que les $\wedge$ aigus du Δ qu'on va former ne s'éloignent pas beaucoup de 45°. On place le pied du graphomètre en C; soit D le centre du demi-cercle; on dirige un rayon visuel suivant DE, parallèle à BC, et l'autre sur le point A, suivant DA : on obtient ainsi la mesure de l'$\wedge$ ADE. Cela posé dans le Δ rectangle AED, on connait le côté DE=BC, et l'$\wedge$ aigu ADE; on pourra donc calculer AE : ajoutant BE=DC, qui est la hauteur de l'instrument, on a AB.

Soit CD=1^m,2, BC=98^m,57 *angle* D=47° 28' 37".

On a (p. 161) *log* AE=*log* DE+*log tg* D—10

$$L.\ DE = 1,9937448$$

$$log\ tg\ 47°\ 28'\ 30'' = 10.0375671$$

$$diff.\ tab.\ \times \frac{7''}{10''} = \qquad 296$$

$$log\ AE = 2,0313415$$

En se bornant à 7 décimales, on trouve dans la table le nombre 10748; différence avec notre logarithme, 138; différence tabulaire, 404; d'où $\frac{138}{404}$=0,34, et la valeur de AE est 107,4834.

L'erreur sur *log* DE est $<\frac{5}{10^8}$; comme la partie négligée dans le calcul des différences est $=\frac{1}{10^8}$, que d'après le tableau C, page 392, $\eta<\frac{1}{10^9}$, il en résulte que l'erreur sur *tg* 47° 28'37" est $<\frac{5}{10^8}$; donc *log* AE est en erreur de moins que $\frac{1}{10^7}$; il est donc compris entre

2,0313416 et 2,0313414 (*a*)

Le nombre donné par la table est 107,48.

Prenant les différences entre nos logarithmes et celui de 107,48, lesquelles sont respectivement

139, 137 (unités décimales du 8ᵉ ordre);

on les divise par la différence tabulaire 404; d'après la théorie des logarithmes, en calculant les quotients à $\frac{1}{2}$ centième près, ce qui donne 0,345 et 0,335, on aura deux limites du nombre cherché, lesquelles sont 107,48345 et 107,48335.

Ex. 3.—Fig. 16. *Calculer la distance d'un point accessible* A, *à un autre qui ne l'est pas, mais qui est visible du point* A.

Après avoir mesuré une base AC qui soit égale à AB estimé par aperçu, et de l'extrémité C de laquelle on puisse voir les points A et B, on mesure les $\wedge$ A et C; dans Δ ABC on connaîtra donc le côté AC et les $\wedge$ A, C, ce qui suffit pour trouver AB. A cet effet on a la proportion

$$\sin B : \sin C :: b : c.$$

Soit AC=368^m,50, A=56° 49' 52", C=48° 32' 6",

d'où B=180−(A+C)=74° 38' 2"

$$\log \sin C = \begin{cases} 9,8746795 \\ 112 \end{cases} \qquad \log \sin B = 9,9841895 \atop \underline{+\ 12}$$

$$\log b = 2,5664375 \qquad = 9,9841907$$

$$C.\ \log \sin B = \underline{0,0158093}$$

$$\log c = 2,4569375 \qquad \text{d'où } c = 286,37$$

Chacun des log. sin. qui entre dans *log c* est en erreur d'une quantité moindre que $\frac{1}{10^7}$; l'erreur sur *log b* est $< \frac{5}{10^8}$; celle de *log c* est donc $< \frac{25}{10^8}$, et les deux limites de *log c* sont

$$2,45693725 \qquad 2,45693775.$$

Les nombres correspondants sont

le 1er en moins 286,37, le 2e en plus 286,38.

Ex. 4. — Fig. 17. *Calculer la distance de deux points* A, B, *inaccessibles, mais visibles des environs du point* C.

Au moyen de l'exemple 3, on calculera les logarithmes de AC et de CB ; on mesurera l'$\wedge$C : cela fait, sans chercher les valeurs de AC et de CB même, on a tout ce qu'il faut pour déterminer AB. En effet, on a (p. 20)

$$tg\frac{1}{2}(A-B) = \frac{a-b}{a+b}\cot\frac{1}{2}C.$$

Posons $$\frac{b}{a} = tg\ \varphi,$$

φ est $\wedge$ auxiliaire ; d'où

$$\log tg\ \varphi = \log b - \log a.$$

Comme $tg\ 45° = 1$, on a

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{1-\frac{b}{a}}{1+\frac{b}{a}} = \frac{tg\ 45° - tg\ \varphi}{1 + tg\ 45°.tg\ \varphi} = tg\ (45° - \varphi)\ (\text{p. } 16, \text{l. } 1).$$

Donc $tg\frac{1}{2}(A-B)=tg(45°-\varphi).cot\frac{1}{2}C.$

Cette transformation épargne la recherche de deux logarithmes.

Ayant $\frac{1}{2}(A-B)$, on trouve AB ou c par la formule

$$c=\frac{a \sin C}{\sin A}.$$

Ex. 5. — Fig. 18. *Trois points* A, B, C, *étant donnés, on demande de placer par rapport à ces points, le point* D, *connaissant les angles* ADB, CDB, *et sachant que la figure* ABCD *est plane.*

On obtient une solution graphique en décrivant sur AB, BC des segments respectivement capables des angles donnés ADB, CDB. Les arcs obtenus se couperont en B ; mais ils auront en outre de commun le point cherché D.

Pour résoudre la question par le calcul, soit

$$BC=a,\ AC=b,\ AB=c,$$

$$\wedge\ ABC=B,\ ADB=\alpha,\ BDC=\beta.$$

Prenons pour inconnues l'angle BAD$=x$, et BCD$=y$.

On a, dans le quadrilatère ABCD,

$$x+y+\alpha+\beta+B=360,$$

d'où $$x+y=360-(\alpha+\beta+B). \quad (1)$$

Reste à chercher une seconde équation entre ces inconnues ; à cet effet on prend les $\triangle$ ABD, BCD.

Le premier donne $BD=\frac{c.\sin x}{\sin \alpha}$, (p. 11)

le second $BD=\frac{a.\sin y}{\sin \beta}$,

d'où $$\frac{c \sin x}{\sin \alpha}=\frac{a \sin y}{\sin \beta}. \quad (2)$$

Les équations (1) et (2) suffisent pour trouver x et y, en ayant, bien entendu, égard aux propriétés des lignes trigonométriques. Mais comme (1) donne la somme $x+y$, il sera bon de chercher à tirer $x-y$ de (2). On mettra (2) sous la forme

$$\frac{\sin x}{\sin y}=\frac{a \sin \alpha}{c \sin \beta},$$

d'où
$$\frac{\sin x-\sin y}{\sin x+\sin y}=\frac{a \sin \alpha-c \sin \beta}{a \sin \alpha+c \sin \beta}.$$

Le premier membre est égal à

$$\frac{tg\frac{1}{2}(x-y)}{tg\frac{1}{2}(x+y)} \qquad \text{(l. 1, p. 20, f. 10).}$$

Donc
$$tg\frac{1}{2}(x-y)=tg\frac{1}{2}(x+y)\cdot\frac{a \sin \alpha-c \sin \beta}{a \sin \alpha+c \sin \beta}.$$

Pour mettre cette formule en logarithmes, on donne à la fraction la forme $\dfrac{a-\dfrac{c \sin \beta}{\sin \alpha}}{a+\dfrac{c \sin \beta}{\sin \alpha}}$: on pose $\dfrac{c \sin \beta}{\sin \alpha}=c'$, et l'on a

$$tg\frac{1}{2}(x-y)=tg\frac{1}{2}(x+y)\cdot\frac{a-c'}{a+c'}.$$

Cette transformation épargne la recherche de deux logarithmes.

Ayant x et y, on peut calculer BD, AD, CD.

§ 3. — Résolution des ◇.

PROPOSITION XXIII.

Théorème. — Fig. 19.

Dans tout* ◁, *le cosinus d'un côté est égal au produit des cosinus des deux autres, plus le produit des sinus de ces côtés multiplié par le cosinus de l'angle compris.

Soit ABC le ◁ ; supposons d'abord les côtés AB, AC, moindres qu'un quadrant ; menons leurs tangentes AE, AD, tirons DE. Nommons encore a, b, c les trois côtés du ◁, A, B, C, les ∧ opposés.

Dans le Δ DAE on a (p. 6)

$$\overline{DE}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AE}^2 - 2AD \cdot AE \cos DAE\,;$$

or DAE mesure ∧ A du ◁, et si l'on prend le rayon AO pour unité, on a

$$AD = tg\, b,\quad AE = tg\, c\,;$$

donc $\overline{DE}^2 = tg^2 b + tg^2 c - 2\, tg\, b \,.\, tg\, c \,.\, \cos A.$

Le Δ DOE donne aussi

$$\overline{DE}^2 = \overline{DO}^2 + \overline{EO}^2 - 2DO \,.\, EO \,.\, \cos \,.\, DOE$$
$$= séc^2 b + séc^2 c - 2\, séc\, b \,.\, séc\, c \cos a.$$

Égalant ces deux valeurs de DE, remplaçant $séc^2 b$ par $1 + tg^2 b$, $séc^2 c$ par $1 + tg^2 c$, on en tire

$$séc\, b \,.\, séc\, c \cos a = 1 + tg\, b\; tg\, c \,.\, \cos A.$$

Mais $tg\, b = \dfrac{\sin b}{\cos b}$, $tg\, c = \dfrac{\sin c}{\cos c}$, $séc\, b = \dfrac{1}{\cos b}$, $séc\, c = \dfrac{1}{\cos c}$;

substituant, on obtient

$$\frac{\cos a}{\cos b \,.\, \cos c} = 1 + \frac{\sin b \,.\, \sin c \,.\, \cos A}{\cos b \,.\, \cos c},$$

d'où $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \,.\, \cos A.$ (1)

Fig. 20. En second lieu, supposons AC ou $b > 90°$, et

AB ou $c<90°$. Prolongez les arcs AC, BC jusqu'à ce qu'ils se rencontrent de nouveau en C' ; AC', BC', que je nomme b', a', sont les suppléments respectifs de b, a ; l'$\wedge$ C'AB, que je nomme A', est le supplément de A. Puisque dans C'AB les côtés qui comprennent l'$\wedge$ A sont tous les deux moindres que 90°, on a

$$\cos a' = \cos b' \cos c + \sin b' \sin c \cos A'.$$

Remplaçant a' par $180 - a$, b' par $180 - b$, A' par $180 - A$, changeant les signes, on a

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A.$$

C'est (1).

Si AB et AC (fig. 21), c'est-à-dire b et c, sont tous les deux plus grands que 90°, on les prolonge jusqu'à leur seconde rencontre en A'; les arcs $A'B = b'$, $A'C = c'$ seront moindres que 90°, et le triangle A'BC, où $A' = A$, $BC = a$ donne

$$\cos a = \cos b' \cos c' + \sin b' \sin c' \cos A.$$

Comme $b' = 180 - b$, $c' = 180 - c$, cette formule se change encore en (1).

Reste le cas où b et c seraient des quadrants, soit ensemble, soit séparément. Si b est un quadrant, prenons au lieu de b un côté $b + \beta$, β étant infiniment petit; dans le ⊽ le côté a aura changé infiniment peu, l'angle A et le côté c ne changeant pas. Supposons que a soit devenu $a + \alpha$, on aura

$$\cos(a+\alpha) = \cos(b+\beta) \cos c + \sin(b+\beta) \sin c \cos A\,;$$

supprimant les infiniment petits, on retrouve (1), et, comme $b = 90°$, la formule se réduit à

$$\cos a = \sin c \cos A\,;$$

si c est aussi un quadrant, la formule (1) devient $\cos a = \cos A$, ce qui est évident *a priori*.

Remarque. Changeant dans (1) a en b, puis a en c, et réciproquement, on a

(1) $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$,

(2) $\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B$,

(3) $\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C$.

Au moyen de ces trois relations entre les 6 éléments du ◁, on peut trouver trois quelconques de ces éléments, connaissant les 3 autres ; elles sont donc pour la trigonométrie sphérique ce que les formules (4), (5), (6), pr. 13, sont pour la trigonométrie rectiligne. Il ne s'agit que d'en déduire des transformées commodes pour les différents cas. A cet effet il faut chercher des équations dont chacune renferme 4 des 6 éléments : le nombre de ces équations est $\frac{6.5.4.3}{1.2.3.4} = 15$.

Les combinaisons qui répondent à ces équations sont les suivantes :

$$(a) \begin{cases} abc\mathrm{A}, & abc\mathrm{B}, \; abc\mathrm{C}. \\ ab\mathrm{BA}, & ac\mathrm{AC}, \; bc\mathrm{BC}. \\ ab\mathrm{AC}, & ab\mathrm{BC}, \; ac\mathrm{AB}, \; ac\mathrm{CB}, \; bc\mathrm{AB}, \; bc\mathrm{AC}. \\ \mathrm{ABC}a, & \mathrm{ABC}b, \; \mathrm{ABC}c. \end{cases}$$

Les équations relatives aux combinaisons de la première ligne sont trouvées : ce sont les formules (1), (2), (3).

Celles qui se rapportent à la seconde, se trouvent ainsi qu'il suit. De (1) on tire

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c},$$

d'où $\sin^2 A = 1 - \cos^2 A = \frac{\sin^2 b \sin^2 c - (\cos a - \cos b \cos c)^2}{\sin^2 b \sin^2 c}$

$$= \frac{(\sin b \sin c + \cos a - \cos b \cos c)(\sin b \sin c - \cos a + \cos b \cos c)}{\sin^2 b \sin^2 c}$$

$$= \frac{[\cos a - \cos(b+c)][\cos(b-c) - \cos a]}{\sin^2 b \sin^2 c}.$$

D'après la formule (8), pr. 20, l. 1, chaque facteur du numérateur se transforme en un produit; on trouve

$$\sin^2 A = \frac{4 \sin\frac{1}{2}(a+b+c)\sin\frac{1}{2}(a-b+c)\sin\frac{1}{2}(a+b-c)\sin\frac{1}{2}(b+c-a)}{\sin^2 b \sin^2 c}.$$

Divisant de part et d'autre par $\sin^2 a$, on trouve que $\frac{\sin A}{\sin a}$ est une fonction symétrique de a, b, c; donc

(4) $$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}.$$

Ces relations qui répondent aux combinaisons en question, montrent que :

Dans tout ◁ *les sinus des* ∧ *sont entre eux comme les sinus des côtés opposés.*

Pour avoir une relation entre a, b, A, C, on éliminera c entre les formules (1) et (3), et d'abord $\cos c$, ce qui donne

$$\cos a = \sin b \sin c \cos A + \cos a \cos^2 b + \cos b \sin a \sin b \cos C;$$

transposant $\cos a \cos^2 b$, on aura dans le premier membre $\cos a - \cos a \cos^2 b$ ou $\cos a \sin^2 b$; divisant par $\sin b$, il vient

(5) $$\cos a \sin b = \sin c \cos A + \cos b \sin a \cos C.$$

Mais d'après (4), $\sin c = \frac{\sin C \sin a}{\sin A}$; substituant, on a

$$\cos a \sin b = \sin C \sin a . \frac{\cos A}{\sin A} + \cos b . \sin a \cos C.$$

Ici on divisera par $\sin a$, et se rappelant la relation $\frac{\cos a}{\sin a} = \cot a$, on a

(6) $$\cot a \sin b = \sin C . \cot A + \cos b \cos C.$$

C'est la relation cherchée. La permutation de a et b donne

(7) $\cot b \sin a = \sin C \cot B + \cos a \cos C$;

ici a en c (8) $\cot b \sin c = \sin A \cot B + \cos c \cos A$,

b en a (9) $\cot a \sin c = \sin B \cot A + \cos c \cos B$,

c en a (10) $\cot c \sin a = \sin B \cot C + \cos c \cos B$,

b en a (11) $\cot c \sin b = \sin A \cos C + \cos b \cos A$,

(6)-(11) sont les six relations relatives à la troisième ligne de (a).

Pour avoir les trois autres relations restantes, on applique la formule (1) au ∢ supplémentaire. Ainsi posant

$$a' = 180^\circ - A,\ b' = 180^\circ - B,\ c' = 180^\circ - C,$$
$$A' = 180^\circ - a,\ B' = 180^\circ - b,\ C' = 180^\circ - c,$$

on a d'après (1)

$$\cos a' = \cos b' \cos c' + \sin b' \sin c' \cos A'.$$

Remplaçant a', b', c', A' par leurs valeurs, il vient

(12) $\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a$;

permutant (13) $\cos B = -\cos A \cos C + \sin A \sin C \cos b$,

(14) $\cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c$.

Toutes ces formules s'appliquent aussi au ∢ rectangle : supposons l'angle A droit, et introduisons cette hypothèse dans les formules qui renferment A.

La formule (1) devient

(1′) $\cos a = \cos b \cos c$.

Donc : *le cosinus de l'hypothénuse est égal au produit des cosinus des deux autres côtés.*

De (4) on déduit

(2′) $\sin b = \sin a \sin B$, $\sin c = \sin a \sin C$,

ou, *le sinus d'un côté de l'∧ droit est égal au sinus de l'∧ opposé, multiplié par le sinus de l'hypothénuse.*

(6) donne $\cot a \sin b = \cos b \cos C$;

d'où (3') $\operatorname{tg} b = \operatorname{tg} a \cos C$ et $\operatorname{tg} c = \operatorname{tg} a \cos B$,

c'est-à-dire *la tangente d'un côté de l'$\wedge$ droit est égale à la tangente de l'hypothénuse, multipliée par le cosinus de l'$\wedge$ compris entre ces côtés.*

La formule (13).

(4') $\cos B = \sin C \cos b$, et $\cos C = \sin B \cos c$.

Le cosinus d'un $\wedge$ oblique est égal au cosinus du côté opposé, multiplié par le sinus de l'autre $\wedge$ oblique.

La formule (8) donne

$$\cot b \sin c = \cot B,$$

ou (5') $\operatorname{tg} b = \sin c . \operatorname{tg} B$ et $\operatorname{tg} c = \sin b \operatorname{tg} C$,

c'est-à-dire *la tangente d'un côté de l'$\wedge$ droit est égale à la tangente de l'$\wedge$ opposé, multipliée par le sinus de l'autre côté.*

Enfin (12) donnera

$$\cos B \cos C = \sin B \sin C \cos a,$$

d'où (6') $\cos a = \cot B . \cot C$,

ce qui prouve que le *cosinus de l'hypothénuse est égal au produit des cotangentes des $\wedge$ obliques.*

Pour résoudre commodément le $\triangleleft$ rectangle, il est bon d'avoir des relations entre les 5 éléments a, b, c, B, C, pris 3 à 3. Le nombre de ces relations est 10, et les combinaisons, auxquelles elles répondent sont

abc ,		formule (1')
abB ,	acC	(2')
abC ,	acB	(3')
bBC ,	cBC	(4')
bcB ,	bcC	(5')
aBC ,		(6').

Nous avons donc tout ce qu'il faut.

Du reste, (4'), (5'), (6') peuvent se déduire très-simplement de (1'), (2'), (3').

En effet (2') donne $\sin B = \frac{\sin b}{\sin a}$,

(3') $\cos C = \frac{tg\, b}{tg\, a}$,

d'où $\frac{\cos C}{\sin B} = \frac{tg\, b . \sin a}{tg\, a \sin b} = \frac{\cos a}{\cos b}$.

D'après (1') $\frac{\cos a}{\cos b} = \cos c$;

donc $\frac{\cos C}{\sin B} = \cos c$, ou $\cos C = \cos c \sin B$, c'est (4')

et $\cos B = \cos b \sin C$.

De (2') $\sin B = \frac{\sin b}{\sin a}$,

et (3') $\cos B = \frac{tg\, c}{tg\, a}$,

on tire $\frac{\sin B}{\cos B} = \frac{\sin b\, tg\, a}{\sin a\, tg\, c} = \frac{\sin b \cos c}{\cos a \sin c}$.

Remplaçant $\cos a$ par $\cos b \cos c$ (1'), il vient

$tg\, B = \frac{tg\, b}{\sin c}$, d'où $tg\, b = \sin c . tg\, B$. c'est (5')

Ceci donne aussi $tg\, C = \frac{tg\, c}{\sin b}$;

de là $tg\, B . tg\, C = \frac{tg\, b\, tg\, c}{\sin b \sin c} = \frac{1}{\cos b \cos c} = \frac{1}{\cos a}$, (1')

puis $\cos a = \cot B . \cot C$. c'est (6')

Quelques-unes de ces formules peuvent se démontrer

géométriquement, mais les démonstrations manquent de généralité.

Remarque. 1° D'après (1'), si $\cos a$ est $> o$, $\cos b$ et $\cos c$ sont de même signe, et si $\cos a$ est $< o$, $\cos b$ et $\cos c$ sont de signes contraires. Ainsi, parmi les trois côtés a, b, c, il y en a un nombre impair qui sont $< 90°$, et un nombre pair, qui sont $> 90°$.

2° D'après (5') $tg\, b$ et $tg\, B$ sont de même signe : donc l'angle oblique et le côté opposé sont tous les deux $> 90°$, ou tous les deux $< 90°$. Bien entendu que ces deux remarques ne s'appliquent qu'au ⊲ rectangle.

PROPOSITION XXIV.

THÉORÈME.

La tangente de la demi-somme de deux ∧ d'un ⊲ quelconque est égale au cosinus de la demi-différence des côtés opposés, divisé par le cosinus de leur demi-somme, et multiplié par la cotangente de la moitié du troisième ∧.

Pour avoir la tangente de la demi-différence, il suffit de remplacer les cosinus par les sinus.

C'est-à-dire que

$$tg\frac{1}{2}(A+B)=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}.\cot\frac{1}{2}C,$$

$$tg\frac{1}{2}(A-B)=\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}.\cot\frac{1}{2}C.$$

Pour démontrer ces formules, reprenons l'équation 5, pr. 23,

$$\cos a \sin b = \sin c \cos A + \sin a \cos b \cos C,$$

permutant a et b,

$$\cos b \sin a = \sin c \cos B + \sin b \cos a \cos C.$$

Ajoutant ces équations et ayant égard à la valeur de $\sin (a+b)$, il vient

$$\sin (a+b) = \sin c (\cos A + \cos B) + \sin (a+b) \cos C,$$

d'où (a) $\sin c (\cos A + \cos B) = \sin (a+b).(1-\cos C)$.

Mais de $\sin A : \sin B : \sin C :: \sin a : \sin b : \sin c$

on tire $\sin A + \sin B : \sin C :: \sin a + \sin b : \sin c$

$\sin A - \sin B : \sin C :: \sin a - \sin b : \sin c$

ou $(\sin A + \sin B) \sin c = (\sin a + \sin b) \sin C$

$(\sin A - \sin B) \sin c = (\sin a - \sin b) \sin C.$

Divisant chacune de ces égalités par (a), on a

$$(b) \qquad \frac{\sin A + \sin B}{\cos A + \cos B} = \frac{\sin a + \sin b}{\sin (a+b)} \cdot \frac{\sin C}{1 - \cos C},$$

$$(c) \qquad \frac{\sin A - \sin B}{\cos A + \cos B} = \frac{\sin a - \sin b}{\sin (a+b)} \cdot \frac{\sin C}{1 - \cos C}.$$

Or, en vertu des formules (11) et (13), p. 20, l. 1, les premiers membres de ces relations se réduisent respectivement à $tg \frac{1}{2}(A+B)$ et $tg \frac{1}{2}(A-B)$.

En second lieu,

$\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{1}{2}(a+b) . \cos \frac{1}{2}(a-b)$, p. 20, l. 1, f. (5)

$\sin a - \sin b = 2 \sin \frac{1}{2}(a-b) . \cos \frac{1}{2}(a+b)$, *ib.* f. (6)

$\sin(a+b)=2\sin\frac{1}{2}(a+b).\cos\frac{1}{2}(a+b)$, p. 12, l. 1, f. (3

$\sin C=2\sin\frac{1}{2}C\cos\frac{1}{2}$, *ib.*

$1-\cos C=2\sin^2\frac{1}{2}C$. p. 13, l. 1.

Substituant dans (b) et (c), supprimant les facteurs communs et remarquant que $\frac{\cos\frac{1}{2}C}{\sin\frac{1}{2}C}=\cot\frac{1}{2}C$, on trouve

$$(1)\quad\left\{\begin{aligned} tg\frac{1}{2}(A+B)&=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}.\cot\frac{1}{2}C.\\ tg\frac{1}{2}(A-B)&=\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}.\cot\frac{1}{2}C.\end{aligned}\right.$$

Corollaire. Appliquons ces formules au ∢ supplémentaire, en écrivant

$$tg\frac{1}{2}(A'+B')=\frac{\cos\frac{1}{2}(a'-b')}{\cos\frac{1}{2}(a'+b')}.\cot\frac{1}{2}C',$$

$$tg\frac{1}{2}(A'-B')=\frac{\sin\frac{1}{2}(a'-b')}{\sin\frac{1}{2}(a'+b')}.\cot\frac{1}{2}C'.$$

Mais $A'=180°-a$, $B'=180°-b$, $C'=180°-c$,

$a'=180-A$, $b'=180°-B$,

d'où $tg\frac{1}{2}(A'+B')=tg\left[180-\frac{1}{2}(a+b)\right]=-tg\frac{1}{2}(a+b)$,

$$tg\frac{1}{2}(A'-B')=-tg\frac{1}{2}(a-b),$$

$$cos\frac{1}{2}(a'+b')=-cos\frac{1}{2}(A+B),$$

$$sin\frac{1}{2}\left(a'+b'\right)=sin\frac{1}{2}(A+B),$$

$$cos\frac{1}{2}(a'-b')=sin\frac{1}{2}(A-B),$$

$$sin\frac{1}{2}(a'-b')=-sin\frac{1}{2}(A-B),$$

$$cot\frac{1}{2}C'=cot(90+\frac{1}{2}c)=-tg\frac{1}{2}c.$$

Substituant ces valeurs, on trouve

$$(2)\left\{\begin{aligned} tg\frac{1}{2}(a+b)&=\frac{cos\frac{1}{2}(A-B)}{cos\frac{1}{2}(A+B)}\cdot tg\frac{1}{2}c,\\ tg\frac{1}{2}(a-b)&=\frac{sin\frac{1}{2}(A-B)}{sin\frac{1}{2}(A+B)}\, tg\frac{1}{2}c.\end{aligned}\right.$$

Les relations (1) et (2) s'appellent *formules* de NÉPER.

PROPOSITION XXV.

PROBLÈME.

Résoudre le ◁ *rectangle, connaissant l'hypothénuse* a, *et un côté* b.

Pour trouver c, on a la formule (1'), qui donne

$$\cos c = \frac{\cos b}{\cos a}.$$

Quant à B et C, on les tire de (2') et (3').

$$\sin B = \frac{\sin b}{\sin a}, \quad \cos C = \frac{tg\, b}{tg\, a}.$$

Les éléments c, C sont déterminés sans ambiguité, parce qu'ils sont connus par leurs cosinus. Quant à B, qui est donné par son sinus, il doit être de même espèce que b, c'est-à-dire $<90°$ si b l'est, et $>90°$ si b est $>90°$.

PROPOSITION XXVI.

PROBLÈME.

Etant donnés b, c, *trouver* a, B, C.

Les formules (1'), (5') donnent $\cos a = \cos b \cos c$, $tg\, B = \frac{tg\, b}{\sin c}$, $tg\, C = \frac{tg\, c}{\sin b}$.

Point d'ambiguité.

PROPOSITION XXVII.

PROBLÈME.

On connaît a *et* B, *trouver* b, c, C.

Les relations (2')(3') (6') donnent

$\sin b = \sin a \sin B$, $tg\, c = tg\, a \cos B$, $\cot C = \cos a\, tg\, B$.

Le côté b étant de même espèce que B, il n'y a pas d'ambiguité.

PROPOSITION XXVIII.

Problème.

Etant donnés b, B, *trouver* a, c, C.

On prendra (2'), (5'), (4'), qui donnent

$$\sin a = \frac{\sin b}{\sin B}, \quad \sin c = \frac{tg\, b}{tg\, B}, \quad \sin C = \frac{\cos B}{\cos b}.$$

Ici les trois inconnues sont données par leurs sinus, ce qui indique plusieurs solutions. En effet, il y en a deux si $\sin b < \sin B$. Car dans ce cas il y a deux valeurs pour a; il y en a aussi 2 pour c, et 2 pour C. Mais à chaque valeur de a il ne répond qu'une valeur de c, car l'espèce de a et de b détermine celle de c (p. 23, r.); enfin C devant être de même espèce que c, il s'ensuit qu'à chaque système de valeurs de a et c, il ne répond qu'une valeur de C. Soit ABC (fig. 22) un ◁ rectangle en A et satisfaisant à la question. Prolongez les arcs BC, BA jusqu'à leur seconde rencontre en B'; le ◁ ACB' renfermera le côté donné $AC = b$, et l'angle opposé $B' = B$; il satisfait donc aussi.

Il n'y a plus qu'une solution quand $b = B$; alors $a = 90°$, $c = 90°$, $C = 90°$, et le ◁ est birectangle.

Il y a impossibilité quand $\sin b > \sin B$.

PROPOSITION XXIX.

Problème.

Etant donnés b *et l'angle adjacent* C, *trouver* a, c, B.

Des formules (3'), (5'), (4'), on tire

$$tg\, a = \frac{tg\, b}{\cos C}, \quad tg\, c = \sin b \cdot tg\, C, \quad \cos B = \cos b \sin C.$$

Sans ambiguité.

PROPOSITION XXX.

Problème.

Connaissant B, C, *trouver* a, b, c.

(6') donne $\cos a = \cot B \cot C$

de (4') on tire $\cos c = \frac{\cos C}{\sin B}$, $\cos b = \frac{\cos B}{\sin C}$.

Remarque 1. Les six problèmes précédents contiennent tous les cas du ◁ rectangle. En effet, on peut se donner : 1° les deux ∧ obliques ; 2° un de ces ∧ et un côté ; 3° deux côtés. Le second cas se subdivise en trois ; car le côté donné peut être l'hypothénuse, ou bien un côté de l'angle droit, lequel côté peut être adjacent ou opposé à l'angle donné. Le troisième cas se subdivise en deux, selon que parmi les côtés donnés on a l'hypothénuse ou non. Ce sont les six problèmes traités.

Remarque 2. Au ◁ rectangle se ramènent les cas suivants :

1° Le triangle dans lequel un côté connu a est de 90°. Car dans le ◁ supplémentaire l'angle A' sera droit ; on résoudra donc ce dernier ◁, et ses éléments trouvés feront connaître ceux du ◁ proposé.

2° Le ◁ isocèle. L'arc de grand cercle mené du sommet au milieu de la base, est perpendiculaire à cette base et divise par suite le ◁ en deux ◁ rectangles égaux. Or, quels que soient les trois éléments distincts connus dans le ◁ proposé, on connaîtra deux éléments du ◁ rectangle. Donc, etc.

3° Fig. 23. Le ◁ où $a+b=180°$. Car en prolongeant AC et AB jusqu'à leur seconde rencontre en A', on a $AC+A'C=180°$; mais par hypothèse $AC+BC=180°$; donc $A'C=BC$. Donc le ◁ A'CB est isocèle, ce qui ramène au cas précédent.

Fig. 23. 4° Le ◁ où $A+B=180°$; car on aura l'angle

CBA'=A=A'; donc CA'=CB; par suite CB+AC ou $a+b$ $=180°$.

Remarque 3. Dans les six propositions suivantes, on va traiter le ◁ obliquangle.

PROPOSITION XXXI.

Problème.

Connaissant dans un ◁ *les trois côtés* a, b, c, *trouver les* ∧

La formule fondamentale (p. 23) donne

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}.$$

On transforme cette formule comme son analogue (p. 21) et par des raisons semblables.

Ainsi $2\sin^2\frac{1}{2}A = 1 - \cos A = \frac{\sin b \sin c - \cos a + \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$

$$= \frac{\cos(b-c) - \cos a}{\sin b \sin c}.$$

Opérant comme p. 21, r., il vient

$$\sin^2\frac{1}{2}A = \frac{\sin\frac{1}{2}(a+b-c)\sin\frac{1}{2}(a-b+c)}{\sin b \sin c}.$$

Posons $a+b+c=2p$, d'où $a+b-c=2(p-c)$, $a-b+c=2(p-b)$; nous aurons

$$\sin\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin(p-c).\sin(p-b)}{\sin b \sin c}}.$$

De même $\cos\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin p.\sin(p-a)}{\sin b \sin c}},$

ensuite $$tg\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{\sin(p-c)\sin(p-b)}{\sin p\sin(p-a)}}.$$

Cette dernière est encore la plus simple pour calculer les 3 $\wedge$.

Remarque. On peut discuter ces formules comme leurs analogues (p. 21).

Par exemple, pour que l'arc $\frac{1}{2}$ A soit réel, il faut et il suffit que $tg\frac{1}{2}$ A le soit, c'est-à-dire que l'expression sous le radical soit >0. Or, le périmètre $2p$ est $<360°$; donc $\sin p>0$. Ainsi il faut et il suffit que $\sin(p-c)$, $\sin(p-b)$, $\sin(p-a)$ soient positifs en nombre impair et négatifs en nombre pair. Mais les arcs p, a, b, c, étant tous moindres que 180°, si l'un de ces sinus est négatif, l'arc l'est aussi; et nous savons (p. 21, r.) qu'il est impossible que 2 des trois binômes $p-a$, $p-b$, $p-c$, soient négatifs.

Donc il faut et il suffit qu'ils soient positifs, ce qui donne $a<b+c$, $b<a+c$, $c<a+b$, etc.

PROPOSITION XXXII.

Problème.

Etant donnés les 3 angles A, B, C, *trouver les 3 côtés* a, b, c.

La formule (12), p. 23, donne

$$\cos a=\frac{\cos A+\cos B\cos C}{\sin B\sin C}.$$

De là $$\sin^2\frac{1}{2}a=\frac{\cos A+\cos(B+C)}{2\sin B\sin C}$$

$$=\frac{-\cos\frac{1}{2}(A+B+C).\cos\frac{1}{2}(B-A+C)}{\sin B\sin C}$$

Soit 2P l'excès de la somme des 3 angles A, B, C, sur 180°, de sorte que

$$A+B+C=180°+2P;$$

De là $$\frac{1}{2}(A-B+C)=90°+P-B;$$

$$\frac{1}{2}(A+B-C)=90°+P-C.$$

$$\frac{1}{2}(B-A+C)=90°+P-A.$$

et $$\sin\frac{1}{2}a=\sqrt{\frac{\sin P.\sin(P-A)}{\sin B \sin C}}.$$

De même $$\cos\frac{1}{2}a=\sqrt{\frac{\sin(B-P)\sin(C-P)}{\sin B \sin C}},$$

ensuite $$tg\,\frac{1}{2}a=\sqrt{\frac{\sin P.\sin(P-A)}{\sin(B-P)\sin(C-P)}}.$$

Remarque. Pour que $tg\,\frac{1}{2}a$ soit réel, il faut que les sinus qui sont sous le radical soient négatifs en nombre pair. Or, je dis que parmi les 4 angles P, A—P, B—P, C—P, il ne saurait y en avoir plus d'un qui soit négatif; car d'abord P n'est pas <0, et si l'on avait $A-P<0$ et $B-P<0$, on aurait

$$A+B<2P\ldots \text{ ou } A+B<A+B+C-180°$$

d'où $C>180°$, ce qui n'est pas.

On reconnaît de même qu'il n'y en a pas deux qui soient <180.

Cela posé, je dis qu'il suffit que chacun des 4 $\wedge$ soit >0.

En effet $\quad A-P>0$ donne $2A>2P$

ou $\quad A>A+B+C-180°$,

d'où $\quad A+180°>B+C$,

de même $\quad B+180°>A+C$

$C+180°>A+B$ (*Géom.*, l. 7, p. 10, r. 1)

Posons maintenant

$$P<180°, A-P<180°, \text{ etc.}$$

De là $\quad 2P<360°$ et $A<180°+P$.

La dernière est évidente.

La première donne $A+B+C<540°$.

Cette condition est renfermée dans les précédentes.

Ainsi, pour que $tg\,\frac{1}{2}a$ soit réel, il faut et il suffit que la somme des $\wedge$ surpasse 180°, et que le plus petit $\wedge$, augmenté de 180°, surpasse la somme des deux autres.

PROPOSITION XXXIII.

Problème.

Connaissant deux côtés a, b, *et l'angle compris* C, *trouver* c, A, B.

Les équations de Néper donnent (p. 24)

$$tg\,\frac{1}{2}(A+B)=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}\cdot \cot\frac{1}{2}C,$$

$$tg\,\frac{1}{2}(\mathrm{A}-\mathrm{B})=\frac{sin\,\frac{1}{2}(a-b)}{sin\,\frac{1}{2}(a+b)}.\,cot\,\frac{1}{2}\,\mathrm{C}.$$

De là on déduira A, B.

On aura ensuite $\quad sin\,c=\dfrac{sin\,a.\,sin\,\mathrm{C}}{sin\,\mathrm{A}}.$

Mais comme cette formule peut donner deux valeurs pour c, il est bon d'avoir une autre formule qui ne laisse point d'ambiguité. C'est la formule (3), pr. 23,

$$cos\,c=cos\,a\,cos\,b+sin\,a\,sin\,b\,.\,cos\,\mathrm{C}.$$

Elle montre que si a, b sont de même espèce, et $\mathrm{C}<90°$, $cos\,c$ sera >0 et l'arc $c<90$; si a, b sont d'espèce différente et $\mathrm{C}>90°$, $cos\,c$ sera <0, et l'arc $c>90°$. Il ne reste donc du doute sur le signe de $cos\,c$ que si $cos\,a\,cos\,b$ et $cos\,\mathrm{C}$ sont de signes contraires. Dans ce cas, il sera nécessaire de calculer les deux parties de $cos\,c$, ou au moins de reconnaître quelle est celle qui a la plus grande valeur absolue. Rien n'empêche pour cela de les diviser par $sin\,a\,sin\,b$, de sorte que la question sera réduite à reconnaître quelle est celle des deux quantités $cot\,a.\,cot\,b$ et $cos\,\mathrm{C}$, qui a la plus grande valeur absolue; ce qui est fort simple, et ne pourrait rester indécis que dans le cas où ces valeurs différeraient extrêmement peu l'une de l'autre. Du reste, on peut aussi transformer la valeur de $cos\,c$, afin de la réduire à un produit. A cet effet on pose

$$\frac{sin\,b\,cos\,\mathrm{C}}{cos\,b}=tg\,\varphi,\quad \varphi \text{ angle auxiliaire,}$$

et il vient

$$cos\,c=cos\,b\,(cos\,a+sin\,a.\,tg\,\varphi)=\frac{cos\,b}{cos\,\varphi}.\,cos\,(a-\varphi).$$

Il est aisé de reconnaître l'esprit de ces transformations.

L'angle φ n'étant point un angle d'un ⦣, il s'ensuit qu'il admet une infinité de valeurs. Soit α sa plus petite valeur positive, on aura en général

$$\varphi = k\pi + \alpha \qquad \text{(l. 1, p. 7.)}$$

Donc
$$\cos c = \cos b \frac{\cos(a - k\pi - \alpha)}{\cos(k\pi + \alpha)};$$

mais si k est pair, on peut supprimer $k\pi$ en haut et en bas ; si k est impair, cette suppression change les signes des deux termes de la fraction ; donc on n'a pour $\cos c$ qu'une valeur, et on peut prendre pour φ la plus petite valeur positive.

Remarque. Pour trouver A et B, on peut se servir des formules (6), (7), pr. 23, lesquelles donnent

$$\cot A = \frac{\cot a \sin b - \cos b \cos C}{\sin C},$$

$$\cot B = \frac{\cot b \sin a - \cos a \cos C}{\sin C},$$

en les transformant à l'aide d'un angle auxiliaire.

PROPOSITION XXXIV.

Problème.

Connaissant deux angles A, B, *et le côté adjacent* c, *trouver* a, b, C.

On trouvera a, b par les formules de Néper (p. 24),

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a+b) = \frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)} \cdot \operatorname{tg}\frac{1}{2}c,$$

$$tg\frac{1}{2}(a-b)=\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)}\ tg\frac{1}{2}c.$$

Ensuite $$\sin C=\frac{\sin c\sin A}{\sin a}.$$

L'inconnue C donne ici lieu à une discussion analogue à celle de la proposition précédente. On se servira à cet effet de la formule (14), pr. 23.

$$\cos C=\sin A\sin B\cos c-\cos A\cos B.$$

En posant $\frac{\sin B\cos c}{\cos B}=tg\varphi$, on trouvera

$$\cos C=-\frac{\cos B}{\cos\varphi}\cos(A-\varphi).$$

Remarque. Pour trouver *a* et *b*, on peut aussi se servir des formules (8), (9), pr. 23, en les transformant à l'aide d'un angle auxiliaire.

PROPOSITION XXXV.

Problème.

Etant donnés deux côtés a, b, *et l'angle* A *opposé à l'un d'eux, trouver le reste.*

On a $$\sin B=\frac{\sin A.\sin b}{\sin a}.$$

Pour trouver *c* C, on peut se servir des formules (1) et (6), pr. 23. Mais chacune de ces formules exigeant l'emploi d'un angle auxiliaire, il sera plus simple de tirer $tg\frac{1}{2}c$ et $tg\frac{1}{2}C$ des formules de Néper (p. 24).

Remarque. L'$\wedge$ B n'étant connu que par son sinus, peut admettre deux valeurs. On discutera ce problème plus loin.

PROPOSITION XXXVI.

Problème.

Etant donnés deux $\wedge$ A, B, *et le côté* a, *opposé à l'un d'eux, trouver* b, c, C.

On trouve $$\sin b = \frac{\sin B}{\sin A} \cdot \sin a,$$

c, C seront donnés par les formules de Néper.

Remarque. Ici *b* est donné par son sinus et peut avoir deux valeurs. La discussion suit.

PROPOSITION XXXVII.

Théorème. — Fig. 24.

Si d'un même point A *d'une surface sphérique on mène sur un grand cercle* FBD *qui n'a pas ce point* A *pour pôle, un grand cercle perpendiculaire* CAB *et différents arcs de grands cercles obliques* AE, AF *et* AG,

1° *Le plus petit des deux arcs* AB, AC *sera un minimum, et le plus grand sera un maximum par rapport aux arcs obliques;*

2° *Les arcs obliques qui s'écartent également de part et d'autre de l'arc perpendiculaire seront égaux;*

3° *Les arcs obliques sont d'autant plus grands, qu'ils s'éloignent plus du pied de l'arc minimum, ou qu'ils se rapprochent plus de l'arc maximum.*

Soit AB$<$90°. Prolongez AB d'une quantité A'B égale à AB ; tirez les arcs de grand cercle A'E, A'G, AF.

1° Puisque AB $<$ 90°, ABA' sera $<$ 180°; donc dans le ◁ AEA' le côté ABA' est $<$ AE + A'E. Mais les ◁ rectangles ABE, A'BE sont égaux comme ayant un angle égal

entre côtés égaux ; par suite AE=A'E, et l'inégalité précédente revient à 2AB<2AE; d'où AB<AE.

Donc AB est un minimum ; par suite son supplément AC est plus grand que les suppléments des arcs obliques, c'est-à-dire que AC est un maximum.

2° Si l'arc BF=BE, les ∢ égaux ABE, ABF prouvent que AE=AF.

3° Soit l'arc BG>BE, je dis que AG sera >AE. En effet, prolongez AE jusqu'à la rencontre de A'G : puisque AA'< 180°, la seconde rencontre de AE et AA' se fera sur le prolongement de AA'; mais d'un autre côté, AG, qui est <AC, est aussi < 180°; donc la seconde rencontre de AE et AG se fera aussi sur le prolongement de AG : par suite le prolongement de AE passera entre A' et G, et coupera A'G en un point H, et l'arc AH<180°. Cela posé, on a A'E<A'H+EH; ajoutant AE de part et d'autre, il vient A'E+AE<A'H+AH; d'ailleurs AH<AG+GH; ajoutant A'H, on a

$$A'H+AH<A'G+AG;$$

donc $$A'E+AE<A'G+AG;$$

prenant les moitiés $$AE<AG.$$

Donc, etc.

PROPOSITION XXXVIII.

Problème.

Discuter les solutions des pr. 35 et 36.

La prop. 36 se ramène à 35 par le moyen du triangle supplémentaire.

Il y a un cas d'impossibilité que le calcul indique; c'est celui où *sin* B est >1 (fig. 25). La géométrie le fait aussi reconnaître ; car soit l'angle A < 90°, et AC = *b;* soit mené l'arc CD perpendiculaire à AD, on aura *sin* CD= *sin b sin* A (p. 23, form. 2'); mais puisque A < 90°, CD est aussi < 90° (p. 23, r.) ; donc CD est un minimum

(p. 37); or, si *sin* B ou $\frac{\sin b \sin A}{\sin a}$ est >1, c'est que *sin* CD est $>$ *sin a*, c'est-à-dire que CD est plus grand que *a*, ce qui est en effet impossible. Si l'angle A est obtus, CD sera $>90°$, sera par suite un maximum, et de *sin* B>1, on conclut que $a>$ CD, ce qui est encore impossible. Supposons donc que *sin* B ne soit pas >1.

Quant à A il y a trois cas, selon qu'il est $\lesseqgtr 90°$.

1° A$<90°$. Prenez (fig. 26) AC$=b$, menez l'arc CD perpendiculaire à AE; dans le ⌔ rectangle ACD, le côté CD, de même espèce que l'$\wedge$ A, sera $<90°$. Donc (p. 37) CD est un minimum ; si le point D se meut de D vers A ou vers A', l'arc CD augmentera. Ainsi il y aura deux solutions si A est à la fois $<$AC$=b$, et $<$A'C$=180-b$; il n'y en aura qu'une si *a* tombe entre *b* et $180-b$; enfin il n'y en aura pas si *a* est $>b$ et $>180-b$: car entre A et D il ne tombe que des arcs $<b$, entre A' et D il n'y a que des arcs $<180-b$.

Dans le cas d'une seule solution, on saura si *a* tombe entre CD et AC, ou entre CD et A'C. Supposons que ce soit entre A et D, et sur CB : dans le ⌔ rectangle BCA, l'$\wedge$ B sera aigu, vu que CD$<$CB. Donc $\wedge$ CBA>90, ce qu'il est nécessaire de savoir, vu que cet $\wedge$ n'est donné que par son sinus. On décidera de même la question dans les autres cas.

2° A$=90°$. Si $b=90°$ (fig. 25) il y a indétermination, vu que le point C est le pôle de AD..., par suite tous les arcs menés de C sur AD sont égaux. Ici *a* est nécessairement $=90°$.

Si $b>90°$ (fig. 26) AC et A'C sont les arcs perpendiculaires menés de C sur ADA'. L'un des deux est le minimum, l'autre le maximum ; pour que le ⌔ soit possible, il faut que *a* soit compris entre les deux, et il n'y aura qu'une solution.

3° A$>90°$. Fig. 27. L'arc CD perp. à ADA' est un maximum ; si on fait mouvoir D vers A ou vers A', cet arc CD décroît. Il y aura donc deux solutions si *a* est à la fois $>b$ et

$> 180 - b$; il n'y en aura aucune si $a <$ que b et $<$ $180-b$; il y en aura une si a est compris entre ces deux arcs.

Soit $A=108°$, $b=118°$, $a=50°$. C'est le troisième cas (fig. 27). On a $180-b=62°$. Ainsi $a<b$ et $<180-b$, le ⌔ est impossible.

Si $A=110$, $b=104$, $a=85°$; on voit que a tombe entre $b=104$, et $180-b=76$. Donc il y aura une seule solution, pourvu que $\frac{\sin A \sin b}{\sin a}$ soit $\overline{\lessgtr} 1$. D'ailleurs le côté CB ou a, aboutira entre D et A', parce que les arcs menés de C entre A et D sont tous $>b$ et *a fortiori* $>a$; et comme dans le ⌔ DCB le côté $CB<CD$ qui est maximum, l'$\wedge$ CBD sera $>$CDB qui est droit; ainsi $\wedge B>90°$.

Pour donner un exemple relatif à pr. 36, soit

$$A=86°,\ B=64°,\ a=48°.$$

Dans le ⌔ supplémentaire $a'=94°$, $b'=116°$, $A'=132°$. A' étant $>90°$, et a' tombant entre b' et $180-b'$, il y a une seule solution, et $\wedge$ B' sera $>90°$. Donc dans le ⌔ proposé b est $<90°$.

PROPOSITION XXXIX.

Problème.

Trouver la surface d'un ⌔ en fonction des trois côtés a, b, c.

Nommons A, B, C les 3 angles, D l'angle droit, T l'aire du ⌔ ; on a (*Géom.*, l. 8)

$$\frac{T}{\frac{1}{2}\pi r^2}=\frac{A+B+C-2D}{D},$$

d'où

$$\frac{TD}{\frac{1}{2}\pi r^2}=A+B+C-2D.$$

Je représente le premier membre par S, et supposant les angles exprimés en degrés, j'ai

$$\frac{180\mathrm{T}}{\pi r^2}=\mathrm{S}=\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}-180,$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{S}=\frac{1}{2}(\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C})-90;$$

puis $$\sin\frac{1}{2}\mathrm{S}=-\cos\frac{1}{2}(\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C})$$

$$=-\cos\frac{1}{2}\mathrm{A}\cos\frac{1}{2}(\mathrm{B}+\mathrm{C})+\sin\frac{1}{2}\mathrm{A}\sin\frac{1}{2}(\mathrm{B}+\mathrm{C})$$

$$=-\cos\frac{1}{2}\mathrm{A}\cos\frac{1}{2}\mathrm{B}\cos\frac{1}{2}\mathrm{C}+\cos\frac{1}{2}\mathrm{A}\sin\frac{1}{2}\mathrm{B}\sin\frac{1}{2}\mathrm{C}$$

$$+\cos\frac{1}{2}\mathrm{B}\sin\frac{1}{2}\mathrm{A}\sin\frac{1}{2}\mathrm{C}+\cos\frac{1}{2}\mathrm{C}\sin\frac{1}{2}\mathrm{A}.\sin\frac{1}{2}\mathrm{B}.$$

En vertu des formules de pr. 31, on trouvera

$$\sin\frac{1}{2}\mathrm{S}=\{-\sqrt{\sin^2 p.\sin(p-a).\sin(p-b)\sin(p-c)}$$

$$+\sqrt{\sin^2(p-a).\sin p,\sin(p-b).\sin(p-c)}$$

$$+\sqrt{\sin^2(p-b).\sin p.\sin(p-a)\sin(p-c)}$$

$$+\sqrt{\sin^2(p-c).\sin p.\sin(p-a)\sin p-b}\}:\sin a\sin b\sin c$$

$$=\sqrt{\sin p.\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}.\frac{-\sin p+\sin(p-a)+\sin(p-b)+\sin(p-c)}{\sin a\sin b\sin c}$$

Mais $$\sin(p-a)-\sin p=2\sin\frac{1}{2}a.\cos\left(p-\frac{1}{2}a\right)$$

$$=-2\sin\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}(b+c),\text{ vu que } p=\frac{1}{2}(a+b+c);$$

$$\sin(p-b)+\sin(p-c)=2\sin\left(p-\frac{1}{2}(b+c)\right)\cos\frac{1}{2}(b-c)$$

$$=2\sin\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}(b-c);$$

ce qui donne pour le numérateur de la fraction

$$2\sin\frac{1}{2}a\left\{\cos\frac{1}{2}(b-c)-\cos\frac{1}{2}(b+c)\right\}=4\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c,$$

le dénominateur

$$\sin a\sin b\sin c=8.\sin\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}c,$$

et $$\sin\frac{1}{2}S=\frac{\sqrt{\sin p.\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}}{2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}.$$

On peut déduire de là une formule, due à S. Lhuillier, et que voici

$$tg\frac{1}{4}S=\sqrt{tg\frac{1}{2}p.tg.\frac{1}{2}(p-a)tg\frac{1}{2}(p-b).tg\frac{1}{2}(p-c)}.$$

Pour faire usage de ces formules lorsque les côtés sont donnés en degrés, on calcule les log. sin. ou l. tg. comme à l'ordinaire, et l'on a S en degrés, puis $T=\pi r^2.\frac{S}{180}$ donne l'aire du ⌔ rapportée au carré de l'unité de longueur.

EXEMPLES DE LA RÉSOLUTION DES TRIANGLES SPHÉRIQUES.

Ex. 1. Dans un ⊲ on a

$$a=64°\,23'\,54'',\ b=48°\,18'\,13'',\ c=72°\,17'\,28'',$$

trouver l'angle A.

On peut prendre ici soit $\sin\frac{1}{2}A$, soit $\cos\frac{1}{2}A$, soit $tg\frac{1}{2}A$.

Prenons $$\cos\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{\sin p.\sin(p-a)}{\sin b\sin c}}.$$

d'où $$\log\cos\frac{1}{2}A=$$

$\frac{1}{2}[\log \sin p + l. \sin (p-a) + \text{comp. } l. \sin b + c. l. \sin c]$

$$2p = 185° \, 8' \, 35'' \quad p = 92° \, 34' \, 17'',5$$
$$p - a = 28° \, 1'' \, 23'',5$$

$$l. \sin p = \begin{cases} 9,9995622 \\ 2 \end{cases}$$
$$l. \sin (p-a) = \begin{cases} 9,6719259 \\ 138 \end{cases}$$
$$c. l. \sin b = 0,1268654$$
$$c. l. \sin c = 0,0210829$$
$$\text{Somme} = 19,8194505$$
$$l. \cos \frac{1}{2} A = 9,90972575$$

Dans chacun des quatre *log.* ou *comp. log.* employés, l'erreur est $< \frac{1}{2} \cdot (0,1)^7$, excepté le troisième, où elle est $< (0,1)^7$; donc sur la somme la limite de l'erreur est $< 2,5 \times (0,1)^7$; et pour $l. \cos \frac{1}{2} A$ on peut dire que l'erreur $< 1,5 \times (0,1)^7$; ainsi

$$l. \cos \frac{1}{2} A > 9,9097256$$
$$< 9,9097259$$

d'où $\frac{1}{2} A < 35° \, 40' \, 37'',443$ et $> 35° \, 40' \, 37'',225$

$$A < 71° \, 21' \, 14'',886 \text{ et } > 71° \, 21' \, 14'',450$$

Ex. 2. — Fig. 28. *Les latitudes et les longitudes de deux points du globe étant connues, trouver la distance de ces points.*

Soit AKA' le premier méridien, KFE l'équateur, A, A'

les pôles, B, C les deux points, ABF, ACE leurs méridiens; les latitudes des deux points seront FB, EC; les longitudes KF, KE; tirons l'arc de grand cercle BC qui mesure la distance des points B, C. Dans le ◁ ABC on connaît les côtés AB, AC, compléments des latitudes, et l'angle compris A mesuré par FE, différence des longitudes. On pourra donc trouver l'arc BC. Si les points B, C tombaient de différents côtés de l'équateur, si l'arc FE était $>180°$, les côtés du ◁ auraient d'autres relations avec les données de la question.

Par exemple, soient les deux villes de Pétersbourg et de Nanking.

Pour Pétersbourg

$$BF=59°\ 56'\ 23'',\ KF=27°\ 58'\ 30''$$

pour Nanking

$$CE=32°\ 4'\ 40'',\ KE=116°\ 27'\ 0''.$$

Ainsi $AB=c=30°\ 3'\ 37''$

$AC=b=62°\ 1'\ 30''$

et l'angle $A=84°\ 22'\ 20''$.

Pour trouver le côté BC ou a, on a la relation

$$\cos a=\cos b \cos c+\sin b \sin c \cos A.$$

Posant $$\frac{\sin b \cos A}{\cos b}=tg\,\varphi=\cos A\, tg\, b,$$

il vient $$\cos a=\frac{\cos b}{\cos \varphi}.\cos(c-\varphi).$$

Calcul de φ.

$$l.\,tg\,b=10,2747829$$
$$l.\cos A=\ 8,9915158$$
$$\log tg\,\varphi=19,2662987$$

Log. tg b est affecté d'une erreur dont la limite est $5:10^8$; de même *log. cos* A.

L'erreur de *log tg* φ est donc $< 1:10^7$; ainsi *log tg* φ est compris entre

$$9,2662986 \quad \text{et} \quad 9,2662988\ ^1,$$

Le calcul des différences conduit aux fractions

$$\frac{9760}{1180}, \ \frac{9780}{1180}.$$

L'arc donné par la table est 10° 27′ 30″; le tableau D, page 393, montre que si l'on calcule ces fractions à 0″,01 près, on aura les arcs à 0″,02 près.

Mais $\dfrac{976}{118} = 8,28 - \ldots..$ et $\dfrac{978}{118} = 8,28 + \ldots..$

Donc les limites de φ sont

$$\varphi' = 10^\circ\, 27'\, 38'',26 \quad \text{et} \quad \varphi'' = 10^\circ\, 27'\, 38'',30.$$

Calcul de a.

On a pour *cos a* deux limites, qui sont

$$\cos a < \frac{\cos b \cos(c - \varphi'')}{\cos \varphi''} \qquad \cos a > \frac{\cos b \cos(c - \varphi')}{\cos \varphi'},$$

$\log \cos b =$	9,6712527	$\log \cos b =$	9,6712527
$l.\cos(c - \varphi'') =$	{ 9,9740774 / 10	$l.\cos(c - \varphi') =$	{ 9,9740774 / 7
$c.\,l.\cos\varphi'' =$	0,0072787	$c.\,l.\cos\varphi' =$	0,0072786
	9,6526098		9,6526094

L'erreur sur *log cos b* est $< 5:10^8$; sur *log cos* $(c - \varphi'')$

[1] Si la table indiquait quels sont les logarithmes fautifs en excès, les deux limites de $l.\ tg.\ \varphi$ ne différeraient que de $1:10^7$.

elle est $<1:10^7$, parce que $\theta+\varepsilon_1<\frac{1}{2}:10^7$; de même sur *c. log cos* φ''. Ainsi sur le premier résultat la limite de l'erreur est $25:10^8$; de même sur le second.

Donc *log cos* $a<9{,}65261005$ et $>9{,}65260915$.

Les tables donnent 63° 17′ 50″, et les fractions

$$\frac{1345}{419} \qquad \frac{1255}{419}$$

Comme le complément de l'arc tombe entre 21° et 27°, le tableau B, page 391, montre que si l'on calcule ces fractions à moins de 0″,001, on aura les arcs à moins de 0″015. Ces fractions donnent

$$3'',210+ \quad , \quad 2{,}996-.$$

Ajoutant au premier 0″,015 qu'on ôtera du second, on a

$$3'',225 \qquad 2{,}981.$$

Ces nombres retranchés de l'arc trouvé *qui a été fourni par son cosinus*, il vient

$$a>63^\circ\ 17'\ 46'',775$$

$$a<63^\circ\ 17'\ 47'',019$$

La différence de ces valeurs n'est que de 0″,244

Cet arc réduit en mètres à raison de dix millions pour le quart du méridien donne à peu près 7025524ᵐ+....., résultat qui suppose la terre sphérique.

NOTE

SUR PAGE 371.

IV. *Développer le sinus et le cosinus suivant les puissances de l'arc.*

Pour établir nos formules, nous nous fondons sur le principe que voici :

Soit fx une fonction de x qui ne devient infinie ou imaginaire pour aucune valeur de x comprise entre deux nombres α, β; si on est certain que cette fonction a la même valeur pour $x=\alpha$ et pour $x=\beta$, de sorte que $f\alpha=f\beta$, on pourra conclure que fx ne varie pas toujours dans le même sens, de $x=\alpha$ à $x=\beta$. Cela posé, il y aura donc entre ces limites au moins une valeur de fx qui surpassera les valeurs précédentes et les suivantes, c'est-à-dire un maximum; ou bien il y aura entre $f\alpha$ et $f\beta$ au moins une valeur de fx qui sera surpassée par les précédentes et les suivantes, c'est-à-dire un minimum. Soit α' la valeur de x qui y répond, de sorte que $f\alpha'$ est ou un maximum ou un minimum; soit $\alpha'+i$ une valeur de x différant infiniment peu de α'. Quel que soit le signe de i, $f\alpha'$ devra être ou plus grand que $f(\alpha'+i)$, ou plus petit; c'est-à-dire que $f(\alpha'+i)-f\alpha'$ ne devra pas changer de signe avec i. Or, supposons que $f(\alpha'+i)-f\alpha'$ puisse se mettre sous la forme $i(\text{A}+\text{infin}^{\text{t}}\ \text{p}^{\text{t}})$; si A est fini et différent de zéro, le signe du facteur de i sera celui de A; donc $f(\alpha'+i)-f\alpha'$ changera de signe avec i. Donc $f\alpha'$ ne serait ni maximum ni minimum. Si donc $f\alpha'$ est maximum ou minimum, A doit être nul. Par conséquent, le facteur de i dans $f(x+i)-fx$ devient nul au moins une fois entre α et β.

Cela posé, soit la différence $\sin(a+b)-\sin a$; je nomme k son rapport avec b, c'est-à-dire que je pose

$$\sin(a+b)-\sin a-kb=o. \quad (1)$$

Il s'ensuit que la fonction $\sin(a+x)-\sin a-kx$ devient nulle pour $x=b$; mais elle l'est aussi pour $x=o$. Donc, entre $x=b$ et $x=o$, elle a au moins un maximum ou un minimum. Prenons sa variation

$$\sin(a+x+i)-\sin a-k(x+i)-\{\sin(a+x)-\sin a-kx\}$$

ou $\quad \sin(a+x+i)-\sin(a+x)-ki$;

et d'après pr. 3, $=i\{\cos(a+x)-k+\text{infin}^t\ \text{p}^t\}$

$$=i\left\{\sin\left(\frac{1}{2}\pi+a+x\right)-k+\text{inf}^t\ \text{p}^t)\right\}, \quad (2)$$

et il y a entre o et b une valeur qui, mise pour x, annule $\cos(a+x)-k$. Soit b_1 cette valeur ; on aura

$$k=\cos(a+b_1)=\sin\left(\frac{1}{2}\pi+a+b_1\right); \quad (3)$$

d'où, ayant égard à (1), on tire

$$\sin(a+b)=\sin a+b\sin\left(\frac{1}{2}\pi+a+b_1\right). \quad (4)$$

Cela posé, je dis que

$$\sin(a+b)=\sin a+b\sin\left(\frac{1}{2}\pi+a\right)+\frac{b_2}{2}.\sin\left(\frac{2}{2}\pi+a\right)+$$
$$+\frac{b^3}{1^{3|1}}\sin\left(\frac{3}{2}\pi+a\right)+\ldots\frac{b^{n-1}}{1^{n-1|1}}\sin\left((n-1)\frac{\pi}{2}+a\right)+$$
$$+\frac{b^n}{1^{n|1}}\sin\left(n\frac{\pi}{2}+a+b'\right). \quad (5)$$

b' tombant entre a et b.

Pour le prouver, je supposerai cette formule démontrée, et je prouverai qu'on peut l'étendre, suivant la même loi,

d'un terme de plus. Comme (4) l'établit pour $n=1$, elle se trouvera complétement prouvée.

A cet effet, je pose

$$sin(a+b)-sin\,a-b\,sin\left(\frac{1}{2}\pi+a\right)-\text{etc}\ldots$$
$$-\frac{b^n}{1^{n|1}}sin\left(\frac{n}{2}\pi+a\right)-k'b_{n+1}=o. \qquad (6)$$

Soit la fonction

$$fx=sin(a+x)-sin\,a-x\,sin\left(\frac{1}{2}\pi+a\right)-\text{etc}\ldots$$
$$-\frac{x^n}{1^{n|1}}sin\left(\frac{n}{2}\pi+a\right)-k'x^{n+1}. \qquad (7)$$

Cette fonction devient donc nulle pour $x=b$; mais elle l'est aussi pour $x=o$. Donc entre o et b elle a un maximum ou un minimum. Prenons sa variation; celle d'un terme tel que Ax^m est

$$A(x+i)^m-Ax^m=mAix^{m-1}+\frac{m(m-1)}{2}Ai^2x^{m-2}+\ldots$$
$$=i(mAx^{m-1}+\text{infin}^t\ \text{p}^t).$$

Celle de $sin(a+x)$ est $i(sin\left(\frac{1}{2}\pi+a+x\right)+\text{infin}^t\ \text{p}^t)$;

donc la variation de (7) est

$$i\left[sin\left(\frac{1}{2}\pi+a+x\right)-sin\left(\frac{1}{2}\pi+a\right)-x\,sin\left(\frac{1}{2}\pi+a\right)-\text{etc.}\right.$$
$$\left.-\frac{x^{n-1}}{1^{n-1|1}}.sin\left(\frac{n}{2}\pi+a\right)-(n+1)k'x^n+\text{infin}^t\ \text{p}^t\right]. \qquad (8)$$

D'où il suit qu'il y a entre o et b un nombre b'' qui, mis pour x, annule la partie finie du facteur de (i), et donne

$$sin\left(\frac{1}{2}\pi+a+b''\right)-sin\left(\frac{1}{2}\pi+a\right)-b''\,sin\left(\frac{2}{2}\pi+a\right)-\text{etc.}$$

$$-\frac{b''^{n-1}}{1^{n-1|1}}.sin\left(\frac{n}{2}\pi+a\right)=(n+1)k'b''^{n}. \qquad (9)$$

Or, si dans (5) on remplace a par $\frac{1}{2}\pi+a$, b par b'', on voit que le premier membre de (9) se transforme en

$$\frac{b''^{n}}{1^{n|1}}sin\left(n\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}+a+b'''\right),$$

b''' tombant entre a et b'', par suite entre a et b; donc

$$\frac{b''^{n}}{1^{n|1}}.sin\left((n+1)\frac{\pi}{2}+a+b'''\right)=(n+1)k'b''^{n},$$

d'où $$k'=\frac{1}{1^{n+1|1}}.sin\left((n+1)\frac{\pi}{2}+a+b'''\right).$$

Cette valeur mise dans (6), notre formule est prouvée.

Ainsi, on a en général la formule (5); si l'on y remplace a par $\frac{1}{2}\pi+a$, et qu'on n'oublie pas que $sin\left(\frac{1}{2}\pi+m\right)=cos\,m$, il vient

$$cos\,(a+b)=cos\,a+b\,cos\left(\frac{1}{2}\pi+a\right)+\frac{b^2}{2}cos\left(\frac{2}{2}\pi+a\right)+\ldots$$
$$+\frac{b^{n-1}}{1^{n-1|1}}cos\left((n-1)\frac{\pi}{2}+a\right)+\frac{b^n}{1^{n|1}}cos\left(\frac{n\pi}{2}+a+b'\right). \qquad (10)$$

Dans les formules (5) et (10) je fais $a=o$, et je remplace b par x; on sait que $sin\frac{1}{2}\pi=1$, $sin\frac{2}{2}\pi=0$, $sin\frac{3}{2}\pi=-1$, $sin\frac{4}{2}\pi=o$, etc.

$$\cos\frac{1}{2}\pi = o,\ \cos\frac{2}{2}\pi = -1,\ \cos\frac{3}{2}\pi = o,\ \cos\frac{4}{2}\pi = 1, \text{ etc...}$$

et il vient

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1^{3|1}} + \frac{x^5}{1^{5|1}} - \text{etc...} + \frac{x^n}{1^{n|1}} \sin\left(\frac{n\pi}{2} + x'\right),$$

x' étant entre o et x;

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{1^{4|1}} - \frac{x^6}{1^{6|1}} + \ldots + \frac{x^n}{1^{n|1}} \cos\left(\frac{n\pi}{2} + x''\right),$$

x'' entre o et x.

FIN DE LA TRIGONOMÉTRIE.

NOTE III

(GÉOMÉTRIE)

SUR LE VOLUME DU TRONC DE PRISME, DU TRONC DE PYRAMIDE, ET DE L'OBÉLISQUE.

(Voyez la planche de Trigonométrie.)

THÉORÈME I. — FIG. 29.

Dans un tronc de prisme triangulaire on peut faire varier à volonté la longueur de chaque arête latérale, pourvu que la somme des trois arêtes reste constante.

Soit le tronc ABCDEF; sur une arête latérale BE prenez un point quelconque G; joignez-le au point I, milieu de EF, et achevez la section DGH. Les Δ GIE, HIF, seront égaux et les tétraèdres DGIE, DIHF ayant bases égales et même hauteur, sont équivalents. Il s'ensuit que le tronc proposé est équivalent à ABCDGH, où l'arête BG est arbitraire de longueur, la somme des trois arêtes latérales n'ayant pas changé, vu que GE=FH.

Corollaire. On peut donc remplacer chacune des trois arêtes par leur moyenne arithmétique, et le tronc de prisme est équivalent à un prisme construit sur la même base, avec cette arête moyenne, la direction des arêtes restant la même. Il est évident que la somme des perpendiculaires ou hauteurs menées de D, E, F, sur ABC n'a pas varié non plus. Car pour les points G, H, la somme des hauteurs est double de la hauteur du point I, comme pour E, F. De là l'énoncé ordinaire.

DÉF. Nous appelons *obélisque* un polyèdre dont deux faces opposées sont des polygones ayant les côtés parallèles deux à deux ; les autres faces sont des trapèzes. Ces deux premiers

polygones (bases) sont donc équiangles ; s'ils sont semblables, le polyèdre est un tronc de pyramide. Dans un obélisque à bases quadrangulaires, pentagonales, etc., on peut concevoir qu'un ou plusieurs côtés d'une des bases, s'annulent, ce qui donne lieu à plusieurs espèces de polyèdres, auxquels le théorème suivant s'applique. Il est entendu d'ailleurs qu'il convient à tout tronc de pyramide (à bases parallèles).

Théorème II.

L'obélisque est égal à la somme de trois pyramides ayant pour hauteur commune la moitié de la sienne, et pour bases, l'une la base supérieure, l'autre la base inférieure, la troisième le quadruple de la section faite à égales distances de ces bases.

1° Soit (fig. 30) l'obélisque triangulaire, ou tronc de tétraèdre ABCDEF. Prenez le milieu G d'une arête latérale FC, et joignez-le aux sommets de la face opposée ABDE. Le tronc pourra être considéré comme décomposé en trois pyramides G...DEF, G...ABC, G...ABED. Les deux premières sont deux des trois pyramides en question. Quant à la troisième G...ABED, on en transformera la base dans le triangle ADI, DI joignant le point D au milieu de BE, et cette pyramide se trouve changée en G..ADI, ou D..AGI. Or ce tétraèdre est équivalent à celui qui a même base AGI, et pour sommet L; car DG étant ═GL, les hauteurs sont les mêmes. Ainsi le troisième tétraèdre est LGAI, où l'on peut prendre AIL pour base et G pour sommet, mais ALI a pour côtés les sommes des côtés homologues de ABC,DEF; donc ALI est quadruple de la section moyenne.

2° Soit (fig. 31) un obélisque à bases quadrangulaires ABCD *abcd*. Par un sommet quelconque C d'une base, menez une droite qui rencontre les côtés opposés à ce sommet en E, F, par EF et Cc, conduisez un plan terminé aux faces *ac*, *a*B, *d*C. De là trois troncs de tétraèdres, dont les bases inférieures sont AEF,BEC,DCF. Les deux derniers, retranchés du pre-

mier donnent pour reste l'obélisque en question ; les bases et les sections moyennes offrent la même relation. Donc, etc.

3° L'obélisque pentagonal peut de même être ramené à l'obélisque quadrangulaire, ou immédiatement au tronc de tétraèdre.

Remarque. La dénomination de ce corps est tirée d'une brochure, dont l'auteur, M. Koppé, professeur à Soëst, près Munster en Prusse (Westphalie), démontre que l'obélisque est *égal à la somme d'un prisme et d'une pyramide ayant tous deux la hauteur du premier polyèdre : leurs bases sont équiangles avec celles de l'obélisque ; celle du prisme a pour côtés les deux sommes, et celle de la pyramide, les demi-différences des côtés parallèles des bases du polyèdre donné.*

Cette propriété peut se démontrer par décomposition, dans le cas du tronc de tétraèdre; elle se déduit d'ailleurs, ainsi que le théorème II ci-dessus, de la pr. 17, l. 8. En effet, soient B^2, b^2 les aires des bases du tronc, h sa hauteur. Son volume est (p. 17),

$$V=\frac{1}{3}h(B^2+b^2+Bb)=\frac{1}{6}h(B^2+b^2+(B+b)^2),$$

ce qui est notre théorème II.

On a aussi $V=h\left(\frac{B^2+b^2+2Bb}{4}+\frac{B^2+b^2-2Bb}{12}\right)$

$$=h.\left(\frac{B+b}{2}\right)^2+\frac{1}{3}h\left(\frac{B-b}{2}\right)^2.$$

C'est la règle de M. K.

Si les bases de l'obélisque sont des trapèzes de même hauteur, soient a, a' les bases de l'un de ces trapèzes, α, α' celles de l'autre; celles de la section moyenne seront $\frac{a+\alpha}{2}$, $\frac{a'+\alpha'}{2}$; soit h la hauteur commune de ces trapèzes, H celle de l'obélisque. Le volume est

$$\frac{1}{6}\mathrm{H}h\left[\frac{a+a'}{2}+\frac{\alpha+\alpha'}{2}+4\left\{\frac{\frac{a+\alpha}{2}+\frac{a'+\alpha'}{2}}{2}\right\}\right]$$

$$=\mathrm{H}.\frac{\left(\frac{(a+a')h}{2}+\frac{(\alpha+\alpha')h}{2}\right)}{2};$$

c'est *la demi-somme des bases multipliée par la hauteur.* Ce résultat peut être trouvé d'une autre manière; car le corps dont il s'agit est un ⌸ tronqué.

FIN.

TABLE DES MATIÈRES.

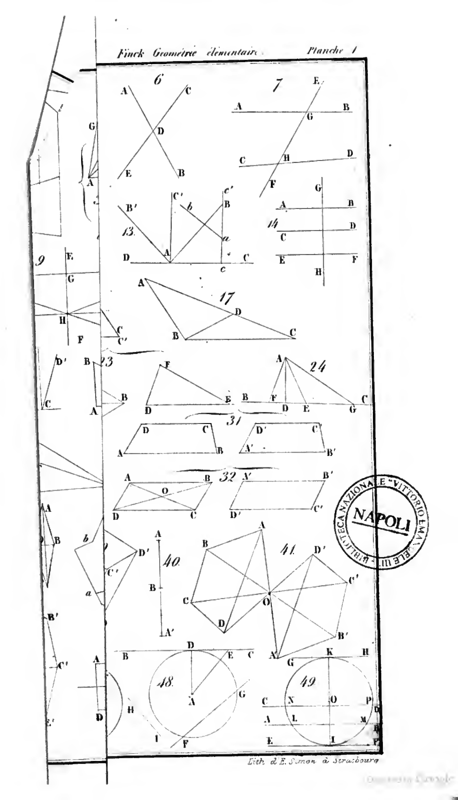
GÉOMÉTRIE.

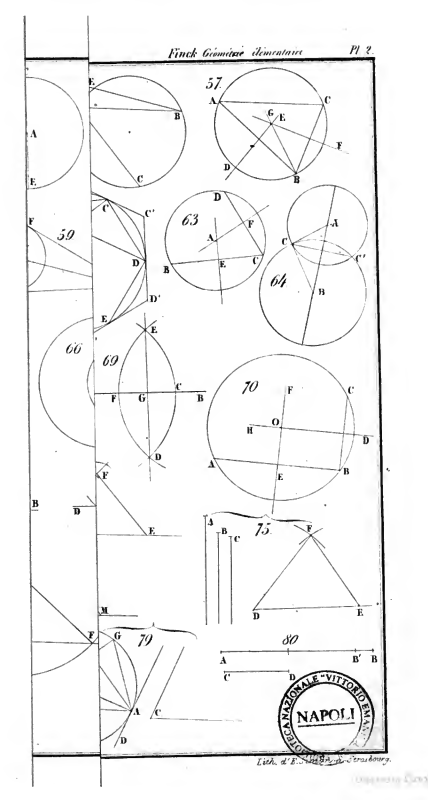
TRIGONOMÉTRIE.

Imprimerie de Hennuyer et Turpin, rue Lemercier, 24. Batignolles.

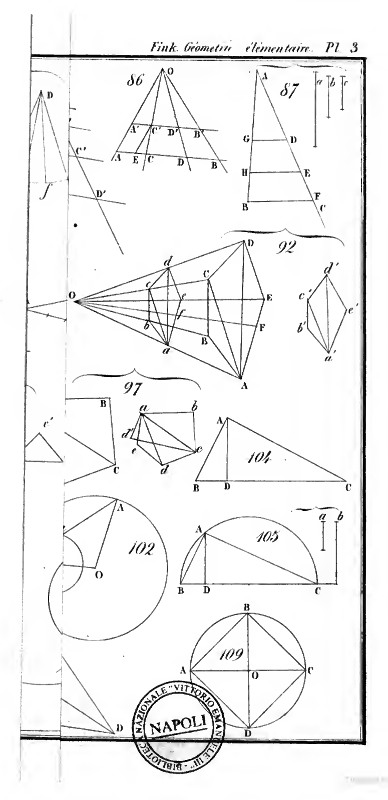


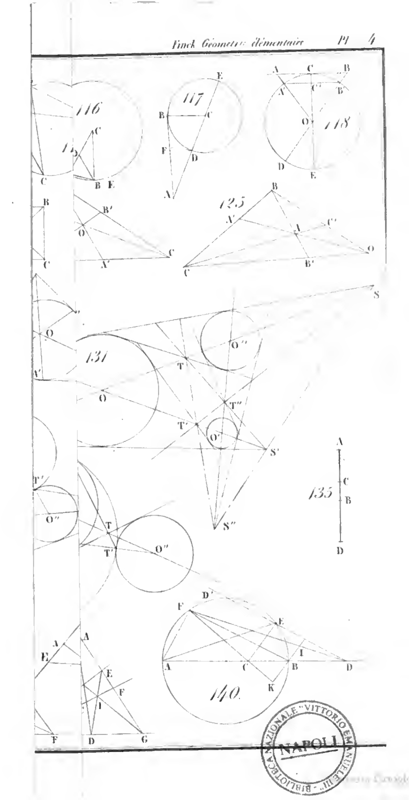


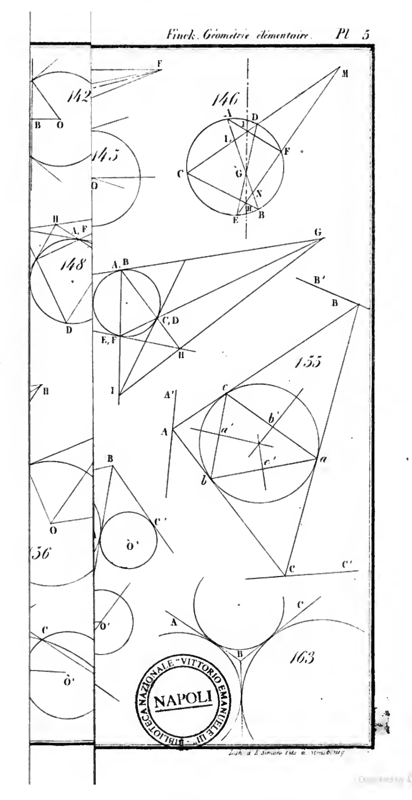

Finck Géométrie élémentaire
Planche 1
6
7
13.
14
9
17
23
24
31
32
40.
41
48.
49
Lith. d'E. Simon à Strasbourg



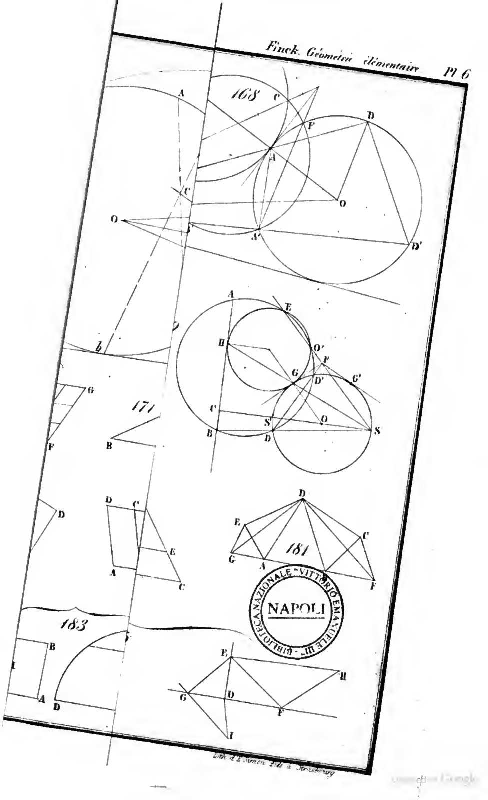
Lith. d'E. Simon fils à Strasbourg.


86
O
A'
C'
D'
B'
A
E
C
D
B
87
A
a
b
c
G
D
H
E
B
F
C
92
D
d
C
c
e
E
O
f
F
b
B
a
A
d'
c'
e'
b'
a'
97
B
a
b
d'
e
c
d
C
A
104
B
D
C
102
A
O
105
A
a
b
B
D
C
109
B
A
O
C
D

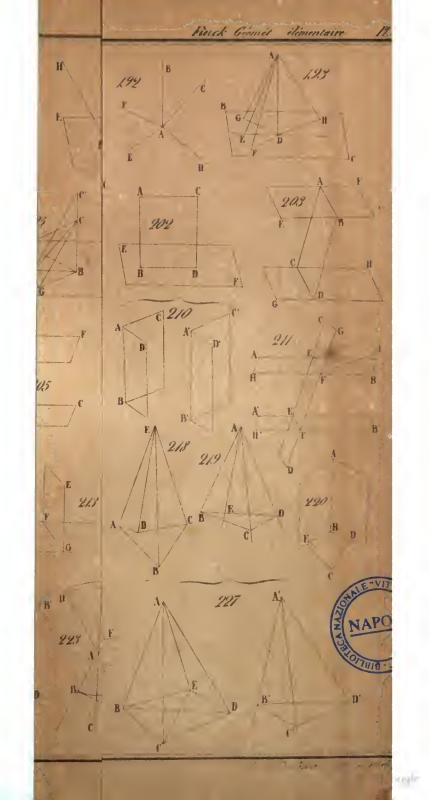

116
117
118
125
131
135
140

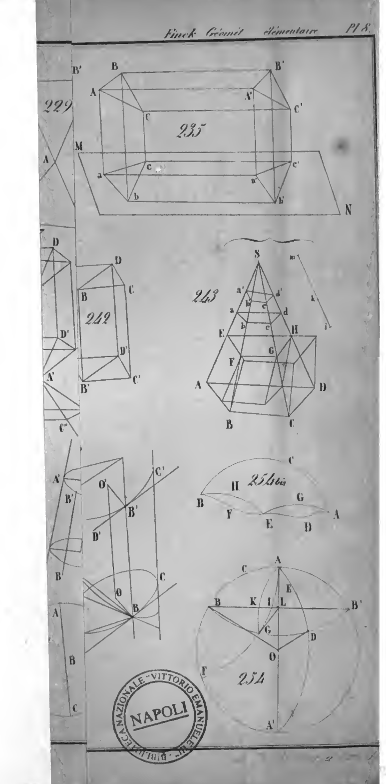


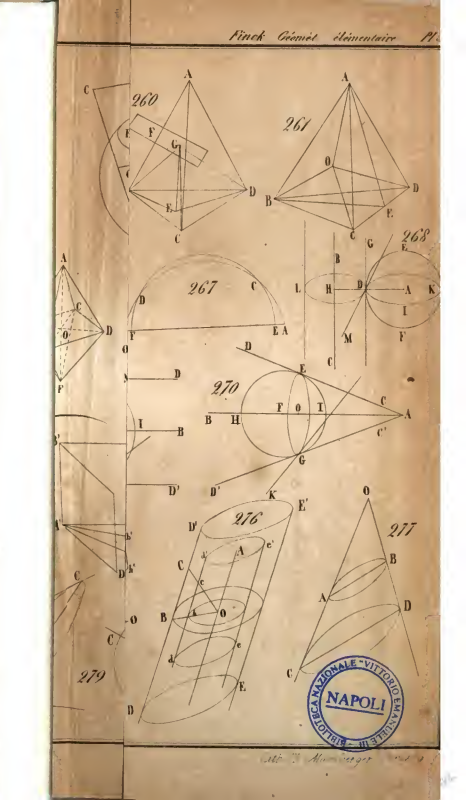
Lith. de E. Simon fils à Strasbourg

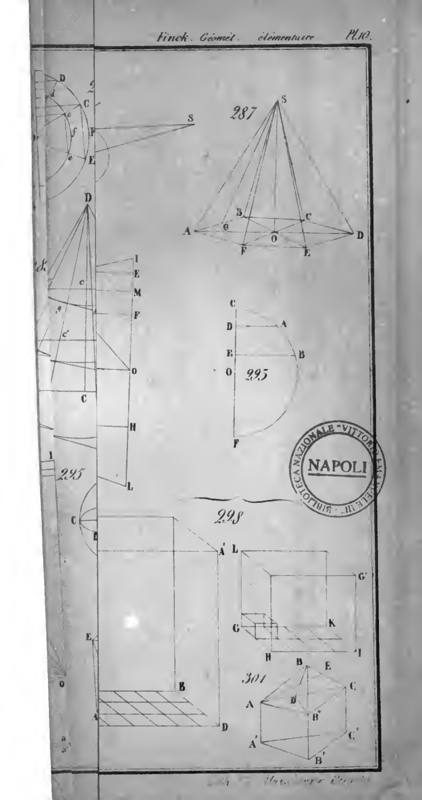


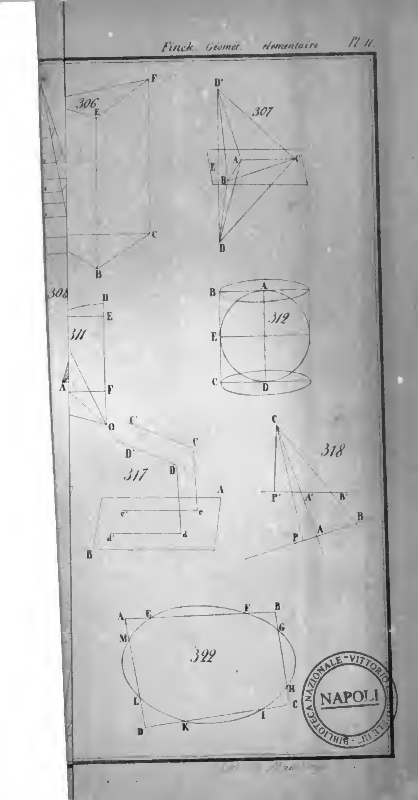
Lith. d'E. Simon fils à Strasbourg

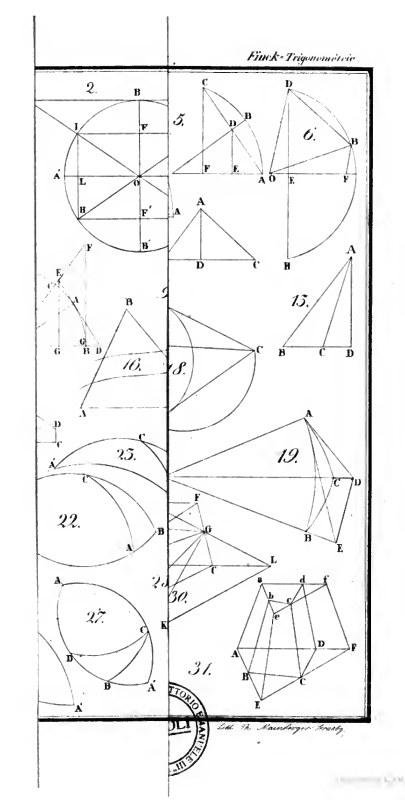

192
B
C
F
A
E
H
193
A
B
G
H
E
F
D
C
202
A
C
E
B
D
F
203
A
F
E
B
C
H
G
D
210
A
C
D
B
A'
C'
D'
B'
211
C
G
A
E
H
F
B
A'
E'
H'
F
B'
D
218
E
A
D
C
B
219
A
B
E
D
C
220
A
B
D
E
C
227
A
E
B
D
C
A'
B'
D'
C'
213
E
F
G
223
F
A
B
C
D


229
235
242
243
254 bis
254
A
B
C
D
E
F
G
H
S
M
N
O


260
A
C
F
G
D
E
C
261
A
O
B
D
E
C
267
D
C
F
E A
268
B
G
E
L
H
D
A
K
I
M
F
C
270
D
E
C
B
H
F
O
I
A
C'
G
D'
K
276
E'
D'
d'
A
e'
C
c
B
O
d
e
E
D
277
O
B
A
D
C
279
C
O
C'
B'
A'
D
O
D
I
B
D'


287
S
B
C
A
G
O
D
F
E
C
D
A
E
B
O
295
F
298
L
G'
G
K
H
I
301
B
E
C
A
D
B''
A'
C'
B'
225
C
A'
E
B
A
D
O


306
F
E
C
B
307
D'
E
A
C'
B'
D
308
D
E
311
A
F
O
312
B
A
E
C
D
C'
C'
D'
D
317
A
c'
c
d'
d
B
C
318
P'
A'
B'
P
A
B
A
E
F
B
G
M
322
H
L
C
I
D
K


2.
5.
6.
13.
16.
18.
19.
22.
23.
27.
30.
31.
Lith. Th. Maunberger Strasbg.



